உளப்புள்ளியியல்

(PSYCHOLOGICAL STATISTICS)

துணைப்பாடம்

கே. நந்தி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 457

Psychological Statistics Ancillary

K. NANTHI

PRICE Rs. 7-55

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises
1, Smith Lane, Mount Road, Madras-2.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி–உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்றாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'உளப் புள்ளியியல்' துணைப்பாடம்** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **457** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **492** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. அலைவுப் பரவல்
(Frequency Distribution)

(1) புள்ளியியல் அறிமுகம்:

18ஆம் நூற்றுண்டின் இறுதியிலேயே ஜெர்மெனியில் அரசாங்கப் புள்ளி விவரங்களை முறையாகச் சேகரிக்கத் தொடங்கினர். 'புள்ளியியல்' என்றால், நாட்டு மக்களின் நிலையைக் குறித்துத் தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்' என்பது நமது மூதாதையர் எண்ணம். ஆனால், நமது காலத்திலோ மனிதன் தொடர்பு கொண்டுள்ள எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு, ஆராயப்படுகின்றன. சமூக அறிவியல் அறிஞர்களின் ஆராய்ச்சிகளிலும், தனியார் துறை, பொதுத்துறை ஆளுநர்களது ஆட்சிகளிலும் நவீனப் புள்ளியியல் முறைகள் ஊடுருவி நிற்கின்றன. அன்றாட மனித வாழ்வில் தோன்றும் தெளிவற்ற நிலைகளை ஆய்வதற்கும், அறிவு வளர்ச்சிக்கும், வேண்டிய கோட்பாடுகளையும் செயல் முறைகளையும் உள்ளடக்கிய ஒரு பேரியலாகப் 'புள்ளியியல் இன்று வளர்ந்து விட்டது. இந்த வளர்ச்சி பல நூற்றுண்டுகளாகப் படிப் படியாக நிகழ்ந்தது. என்றாலும், கடந்த முப்பதாண்டுகளில் இதன் வளர்ச்சி விரைந்து நிகழ்ந்தது எனக் கூறலாம்.

புள்ளியியலுக்குப் பல ஆசிரியர்களால் பல்வேறு விளக்கங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. 'பல வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளால் குறிப்பிடத் தக்க அளவிற்குப் பாதிக்கப்பட்ட எண் அளவை விவரங்கள்' என யூல் (Yule) என்பவர் புள்ளியியலுக்கு விளக்கம் தந்துள்ளார். பௌலி (Bowley) என்பவர் 'சராசரிகளின் அறிவியல்' என இதற்கு விளக்கம் தந்துள்ளார். ஆனால், புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்கும் வழி முறைகளை, சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பாகுபடுத்தி பட்டியல்களில் அமைக்கும் முறைகளை, அவற்றை எப்படி ஆய்வது, ஆய்ந்த முடிவுகளைப்

பொதுப்படையாக்குவது ஆகியவற்றைக் கொண்டதே 'புள்ளி யியல் முறை' அல்லது சுருக்கமாக, 'புள்ளியியல்' எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

பரிசோதனைகளிலிருந்து பெறப்படும் விவரங்கள் சாதாரண மாக எண்களின் அல்லது அளவுகளின் குவியலாக இருக்கும். எண் குவியலைப் பார்த்த அளவிலேயே பரிசோதனையின் முடிவைத் தெரிந்து கொள்ள இயலாது. பரிசோதனையி லிருந்து கிடைத்த விவரங்களைப் பாகுபடுத்தல், சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும் அமைத்தல், ஏற்கக்கூடிய முடிவுகளைப் பெறு வதற்கான செயல் முறைகளை வகுத்தல் ஆகியவை பரிசோதனை யின் சரியான முடிவைக் காணத் தேவைப் படுகின்றன. இவற் றிற்கான வழிமுறைகளைப் புள்ளியியல் அளிக்கிறது. நம்பிக்கை யோடு முடிவுகளைக் கூறுவதற்குச் செயல் முறைகளைக் காண்பதே நவீன புள்ளியியல் முறைகளின் தனிச் சிறப்பாகும்.

உளவியல் மாணவர்களுக்குப் புள்ளியியல் அறிவு இன்றிய மையாததாகும். நவீன உளவியல் இலக்கியத்தைப் புரிந்து கொள்ள புள்ளியியல் முறைகளைப் பற்றிய அறிவு தேவைப் படுகின்றது. உளவியலில் பெரும்பாலும் சோதனைகளை உரு வாக்கி, அவற்றைச் செயல்படுத்தி முடிவுகள் எடுக்கப்படு கின்றன; மேலும், மனிதர்கள், நிகழ்ச்சிகள், பொருள்கள், அளவைகள் ஆகியவற்றினலான முழுமைத் தொகுதிகளிலி ருந்து (populations) பிறந்த மாதிரிகளில் (samples) கண்டறிந்த விவரங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதி களைப் பற்றிய முடிவுகளும், மதிப்பீடுகளும் பெறப்படுகின்றன. எனவே, அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் புள்ளியியல் முறைகள் மிகவும் பயன்படுகின்றன. ஆகவே, புள்ளியியல் முறைகளும், கருத்துகளும் உளவியலில் முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றிருக் கின்றன. புள்ளியியலின் துணை கொண்டு வியக்கத்தக்க அள வில் உளவியல் வளர்ந்துள்ளது எனக் கூறினல், அது மிகையா காது.

புள்ளியியலை எல்லா நிலைகளிலும் பயன்படுத்தினல் தவருன முடிவுகளைப் பெற வழி செய்துவிடும். புள்ளியியலின் வழிமுறை களை எண்களாலான விவரங்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும். புள்ளியியலின் துணை கொண்டு எதையும், எப்படி யும் நிறுவலாம் என்ற கருத்து தவருனதாகும். ஒரு சூழ்நிலை யில் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை எல்லாச் சமயங்களிலும் பயன்படுத்தக் கூடாது. இது தவருன முடிவைத் தந்துவிடும்.

புள்ளியியலின் வழிமுறைகளைச் சரியான முறையில் செயல் படுத்தப் புள்ளியியலில் நன்கு பயிற்சி பெற்றிருக்க வேண்டும்.

சமுதாய இயல்களிலும், வணிக நிர்வாகம், அரசாட்சி ஆகிய துறைகளிலும் புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்து வதில் பல முன்னேற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. எனவே, வள மான, ' நவீன சமுதாயத்தை உருவாக்குகின்ற பணியில் புள்ளியியலின் பங்கு மிக இன்றியமையாததாகும்.

(2? தொடர் மாறிகளும், தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளும் (Continuons and discrete Variables):

மாறிகளைத் (மாறும் மதிப்புகளைப் பெற்றுள்ள, அதா வது அளவுகளின் மதிப்புகள் நிலேயானவை அன்று) தொடர் மாறிகள், தொடர்ச்சியற்ற அல்லது தனித்த மாறிகள் என இருவகைகளாகப் பிரிக்கலாம். தொடர் மாறி என்பது கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் வீச்சில் எந்த எண்ணின் மதிப்பையும் பெறக் கூடியது. அந்த மாறியின் அடுத்தடுத்த மதிப்புகள் மிகக் குறைந்த அதிகரிப்புகளால் வேறுபடுகின்றன. அந்த மாறியின் எவைய. கிலும் இரு மதிப்பு களுக்கிடையே எந்த மதிப்பையும் பெறலாம். எடுத்துக்காட் டாக, உயரம், பருமன், வயது, நேரம், தூரம் (distance) ஆகிய வை தொடர் மாறிகளாகும். மனச் சோதனை மதிப்புகளும், பருப்பொருள் அளவுகளும் தொடர்ச்சியான தொடர்களாகும் (continuous series). தனித்த மாறி என்பது இடையிடையே விட்டுவிட்டு மதிப்புகளைப் பெறக் கூடியது; திட்டமான அளவில் மாற்றம் அடைகிறது. குறிப்பான மதிப்புகளையே எடுக்ககூடியது. ஒரு குடும்பம் 1, 2, 3 அல்லது அதிகமான குழந்தைகளைக் கொண்டதாகச் சொல்கிறேம்; ஆனல் 2.1 அல்லது 2.13 குழந்தைகளைக் கொண்டதாகக் கூறுவதில் பொரு ளில்லே. எனவே, தனித்த மாறியான குழந்தைகளின் எண் ணிக்கை, குறிப்பிட்ட (முழுவெண்) மதிப்புகளையே பெறக் கூடியது. புத்தகங்களில் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை, கல்லூரி புகுமுக வகுப்புகளில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, கால் பந்தாட்டத்தில் வெற்றிப்புள்ளிகள் (football scores), வீடுகளில் அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆகியன போன்றவை தனித்த மாறிகளாகும்.

(3) அளவுகள் (Measurements) :

பருப் பொருள் விஞ்ஞானி (physical scientist) அவர் கண்ட றிந்தவற்றை, ஆய்வுக்கு வசதியாகச் சாதாரணமாக எண் களால் குறிப்பிடுகிருர். மூகவியல் விஞ்ஞானியும் (social scientist) எண்களைக்கொண்டே அளவிடுதலேயும், மதிப்பிடு தலேயும் செய்

முயல்கிறார். இன்று எந்தத் துறையிலும் அளவின் வழியில் பதிவு செய்ய வேண்டும் என்ற அவா மிகுதியாகப் பரவியுள்ளது. அளவு, பல வகைகளாகவும், வேறுபட்ட அளவிற்குத் திருத்த மாக எடுக்கப்பட்டதாகவும் இருக்கலாம். ஒரு குழுவிலுள்ள உறுப்பினர்களை அவர்களின் உயரத்திற்கேற்ப வரிசையாக நிற்கச் செய்து, பார்த்த அளவிலேயே உயரத்தை மதிப்பிட, லாம். மேற்கூறியவாறு உயரத்தை மதிபபிட்டால், A என்ற உறுப்பினர் B என்ற உறுப்பினரைவிட உயரமானவர் அல்லது குட்டையானவர் என்று மட்டுமே கூறமுடியும். ஆனால், ஒவ்வோர் உறுப்பினரின் உயரத்தையும் சரியாக அறிந்து கொள்ள முடியாது. ஓர் அளவுகோலின் துணைகொண்டு குழு விலுள்ள உறுப்பினர்களின் உயரத்தை அளந்தால், ஒவ்வோர் உறுப்பினரின் உயரத்தையும் தனித்தனியாகத் திருத்தமாக அறிய முடியும். இப்பொழுது A என்பவரின் உயரம் B என் பவரின் உயரத்தை விட எத்தனை அடி அல்லது அங்குலம் அதிக மாக அல்லது குறைவாக இருக்கும் எனத் திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியும். மேற்கூறிய இரு அளக்கும் செய்கைகளும் (measuring operations), இச் செய்கைகளினால் கண்டறிந்தவைகளும் வேறுபாடு உடையவைகளாகும். ஒரு பண்பை அளக்கும் செய் கையினால் கண்டறிந்தவற்றின் அடிப்படையில் அளவுத்திட் டத்தை நான்கு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவையாவன:

(1) பெயரளவான அளவுத்திட்டம் (Nominal Scale).

(2) வரிசை அல்லது தர அளவுத்திட்டம் (Ordinal or Ranking Scale).

(3) இடைவெளி அளவுத்திட்டம் (Ratio Scale). என்பனவாகும்.

ஒரு குழுவிலுள்ள உறுப்பினர்களை அவர்களின் கண்களின் நிறத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு பிரித்தால், ஒருவருடைய கண்களின் நிறம் மற்றொருவருடைய கண்களின் நிறத்தைப் போலவோ அல்லது வேறுபட்டோ இருக்கும் என மட்டுமே கூற முடியும். ஆனால், கண் நிறத்தைக்கொண்டு உறுப்பினர்களை வரிசைப்படுத்தவோ அல்லது எந்த அளவிற்கு அதிகமாக அல்லது குறைவாக இருக்கும் எனக் கூறவோ இயலாது. மேற் கூறிய எடுத்துக்காட்டில் கண்களின் நிறம் பெயரளவான மாறி (nominal variable) எனப்படும்; அக் குழுவிலுள்ள உறுப்பினர் களை அடையாளம் காண எண்களையோ அல்லது குறியீடுகளை யோ பயன்படுத்தினால், அத்தகைய எண்கள் அல்லது குறியீடு

கள் பெயரளவான அளவுத்திட்டத்தை அமைக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, கால்பந்தாட்ட வீரர்கள் சட்டை மேலுள்ள எண்கள், சமூக பாதுகாப்பு (social security) எண்கள் ஆகியவற்றைக் கூறலாம்.

ஒரு குழுவிலுள்ள மனிதர்களையோ அல்லது பொருள்களை யோ ஒரு பண்பின் அடிப்படையில் மதிப்பிடும்போது (ranked) அல்லது வரிசையாக 1,2,3,...போன்ற எண்களையிட்டு அமைக் கும்போது அம் மதிப்பீடுகள் அல்லது வரிசை எண்கள், வரிசை அளவு திட்டத்தில் (ordinal scale) அமையும். அவ்வளவுத் திட்டத்திற்கு எடுத்துக்காட்டாக, சமூக–பொருளதார அந் தஸ்து (socio-economic status), ஆளுமைத்திறமை, இயற்கை யாற்றல் சோதனைகளின் முடிவுகள் ஆகியவற்றைக் கூறலாம்.

வரிசை அளவுத்திட்டத்திற்கான எல்லாத் தன்மைகளையும் பெற்றிருந்து, மதிப்புகள் சம அலகுகளில் (equal units) சொல் லப்பட்டிருக்கும்போது அம் மதிப்புகள் இடைவெளி அளவுத் திட்டத்தில் (interval scale) அமையும். திட்ட உளவியல் சோதனைகள், சம அலகுகளைக் கொண்டிருப்பதால் சாதாரண மாக இடை வெளி அளவுத்திட்டங்களாக இருக்கின்றன. இடை வெளி அளவுத்திட்டங்கள் உண்மையான பூச்சியப் புள்ளியைக் (true zero point) கொண்டிருக்காது. இன்றைய வெப்ப நிலை 10°F, ஆகவும் நேற்றைய வெப்பநிலை 20°F ஆகவும் இருந்தால், நேற்றையதின வெப்பம் இன்றைய தின வெப்பத்தை விட இரு மடங்கு எனக்கூறுவது தவறாகும். பாரனீட் அளவுத் திட்டத் தில் (Fahrenheit Scale) 0 டிகிரி, உஷ்ணமே இல்லையென்பதைக் குறிக்காது. ஆற்றல் சோதனையில் ஒருவர் 0 மதிப்பைப் பெற்றால், அவருக்குத்திறமையே இல்லை என்பதை அம் மதிப்பு குறிக்காது. இடை வெளி அளவுத் திட்டத்தில் உண்மையான பூச்சியப் புள்ளியையும், அளவை அலகையும் (Unit of mea-surement) எதேச்சையாக (arbitrarily) எடுத்துக் கொள்ளலாம். சென்டிகிரேட் அல்லது பாரனீட் தெர்மாமீட்டரால் அளக்கப் பட்ட வெப்பநிலையை இடைவெளி மாறிக்கு எடுத்துக்காட் டாகக் கூறலாம்.

இடைவெளி அளவுத்திட்டத்திற்கான எல்லாத் தன்மை களையும் பெற்றிருந்து, உண்மையான பூச்சியப்புள்ளியிலிருந்து அளவுகள் எடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, அந்த அளவுகள் விகித அளவுத்திட்டத்தில் (ratio scale) அமைகின்றன. பருப்பொருள் விஞ்ஞானத்தில் காணப்படுகின்ற அளவுத்திட்டங்கள்

களாகக் கருதவேண்டும; பிரிவுகள்: 0 – 10, 0—20, 20 – 30, ... என்பனவாகும்.

அலைவுப் பட்டியல் அல்லது அலைவுப் பரவல் அமைத்தல்

(1) முதலில் வீச்சை (range) (கொடுக்கப்பட்ட பரவலில் மிகச் சிறிய குறிப்புக்கும், மிகப் பெரிய குறிப்புக்குமுள்ள வேறுபாடு வீச்சு எனப்படும்) தீர்மானிக்க வேண்டும். வீச்சைத் தெரிந்து கொண்டு, எத்தனைப் பிரிவுகள் தேவைப்படுகின்றன என்பதைத் தீர்மானித்துக் கொண்டால், பிரிவின் தூரத்தைந் (பிரிவு இடைவெளியின் அளவை) தீர்மானித்து விடலாம் பிரிவுகள் எத்தனை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும், பிரிவு இடைவெளியின் அளவு எவ்வளவு இருக்கவேண்டும் என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரத்தினைப் பொறுத்ததாகும். பொதுவாக, எல்லாப் பிரிவுகளிலும் விவரங்கள் ஒரே சீராகப் பரவி அமைந்திருக்குமாறு பிரிவுகளை அமைத்தல் வேண்டும். நடைமுறையில், வசதிக்காக 3, 5, 10, 15 போன்ற அளவு பிரிவின் தூரமாகவும், 5 முதல் 15 வரை பிரிவுகள் கொண்டதாகவும் பரவல் அமைந்தால் நல்லது.

பிரிவு இடைவெளியின் அளவைக் குறைத்தால், பிரிவுகள் அதிகமாகிப் பட்டியலின் எளிமை குறைந்து, பிரிவுகளாகப் பிரிப்பதின் பலனை இழந்து விடுகிறோம்; பிரிவு இடைவெளியின் தூரம் அதிகமானால், விளக்கமாக இருக்கின்ற பல விவரங்களை இழந்துவிடுகிறோம் (பிரிவுகளில் மறைந்து விடுகின்றன); எனவே, இவற்றைக் கருத்தில் கொண்டு பிரிவு இடைவெளியின் அளவையும், மொத்தப் பிரிவுகளையும் தீர்மானிக்க வேண்டும். வீச்சை, மொத்தப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையால் (அல்லது பிரிவு இடைவெளியின் அளவால்) வகுத்தால், பிரிவு இடைவெளியின் அளவைத் (அல்லது பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை) தோராயமாகத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இம் முறையினால் கிடைக்கின்ற மதிப்பு பின்னமாக இருப்பின், அதற்கு அடுத்த நெருங்கிய முழு எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

(2) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளை மேலிருந்து கீழோ அல்லது கீழிருந்து மேலோ வரிசையாக முதல் பத்தியில் அமைக்க வேண்டும்.

(3) ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை மதிப்புகள் அடங்குகின்றன என்பதனைச் சரிபார்க்கும் குறிகளை (Tally marks) பயன்படுத்திக் கணக்கெடுத்து அந்தந்தப் பிரிவுகளுக்கு

களை மாற்றி அமைத்து, உண்மையான செய்திகளைப் பெறும் வண்ணம் வினாக்களை அமைக்கவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, பெண்களின் வயதைப் பற்றிய புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப் படும்போது, அவர்களின் உண்மையான வயதை அறிய, வினாக்கள் நேரடியாக அமையாது, மறைமுகமாக உண்மை வயதைப் பெறக்கூடிய வகையில் ஏற்ற முறையில் வினாக்களை மாற்றி அமைக்கவேண்டும்.

வினாத்தாள்கள் அஞ்சல் வாயிலாக அனுப்பப்படும்போது வினாக்கள் மிகத் தெளிவாகவும், சாதாரண மக்கள் எளிதில் புரிந்துகொள்ள கூடிய வண்ணமும் இருக்கவேண்டும். வினாக்களுக்கான விடைகள் இருவகைப்பட்ட விடைகளுக்கு ஏதுவான முறையில் வினாக்கள் அமையக்கூடாது. வினாத்தாள்களைப் பெறும் நபர்களின் தனிப்பட்ட கருத்துகளையோ, உள்ளத்தையோ புண்படுத்தும் வண்ணம் வினாக்கள் அமையக்கூடாது; ஆம்—இல்லை என்பன போன்ற பதில்களை அல்லது மிகச்சுருக்கமான பதில்களைப் பெறும் வண்ணம் வினாக்கள் அமைய வேண்டும். பெறப்படும் பதில்கள் ஆய்விற்கு நன்கு பயன்படும் வகையில் அமைய வேண்டும் என்பதை வினாத்தாள்களை உருவாக்குபவர்களும், விவரங்களைச் சேகரிப்போரும் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

(5) அலைவுப் பரவல்:

பரிசோதனைகளிலிருந்தும், சோதனைகளிலிருந்தும் சேகரிக்கப்படும் விவரங்கள் ஒழுங்கு செய்யபடாத எண்களின் மதிப்புத் திரளாக இருக்கும்போது அவற்றைச் செம்மைப்படுத்தி மேற்கொண்டு ஆய்வதற்கு வசதியாக அவற்றை ஒழுங்கு படுத்துதல் இன்றியமையாததாகும். சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை ஏற்ற பல பிரிவுகளாக அமைத்து, ஒவ்வொரு பிரிவுக்குட்பட்ட மதிப்புகளையெல்லாம் அந்தந்தப் பிரிவுகளில் அமைத்துக் காட்டும் பட்டியலே அலைவுப் பட்டியல் (Frequency Table) ஆகும்; சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை இவ்வாறு பரவலாக ஒழுங்குபடுத்திய அமைப்பை 'அலைவுப் பரவல்' (Frequency Distribution) என்கிறோம். ஒரு பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கை அப் பிரிவின் அலைவு எனப்படும். எடுத்துக் காட்டாக, 100 மாணவர்கள் உளவியல் பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களை 0—20, 20—40, 40—60, 60—80, 80—100 என ஐந்து பிரிவுகளாகப் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். 0–விருந்து 20 வரை மதிப்பெண்களைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை 0—20 என்ற பிரிவிற்கு எதிராகக் குறிக்கவேண்டும்.

இதுபோன்று ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் எதிராக அந்தந்தப் பிரிவில் அடங்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்க வேண்டும். 10 மாணவர்கள் 20—க்குக் கீழ் மதிப்பெண்களைப் பெற்றிருந்தால், 0—20 என்ற பிரிவிற்கு எதிராக 10ஐ எழுத வேண்டும். 0-20 என்ற பிரிவிற்குரிய அலைவு 10 ஆகும்.

0—20 என்ற பிரிவில் 0 என்பது அப்பிரிவின் கீழ்எல்லை எனவும், 20 என்பது அப்பிரிவின் மேல்எல்லை எனவும் சொல்கிறோம். ஒரு பிரிவின் மேல்எல்லை அதன் அடுத்தப் பிரிவின் கீழ்எல்லையாக அமைந்தால், அந்தப் பிரிவை 'மெய்ப் பிரிவு' (True or Exact Class) என்கிறோம். 0—20, 20—40, 40—60, ...போன்ற பிரிவுகள் மெய்ப்பிரிவுகளாகும். மெய்ப்பிரிவின் மேல்எல்லைக்கும் கீழ்எல்லைக்குமுள்ள வேறுபாடு பிரிவு இடைவெளியின் அளவு (Size of the class Interval) அல்லது பிரிவின் தூரம் எனப்படும். 0—20, 20—40, 40—60,...............போன்ற பிரிவுகளின் பிரிவு இடைவெளியின் அளவு 20 ஆகும். ஒரு பிரிவின் மேல், கீழ் ஆகிய இரண்டு எல்லைகளின் கூட்டுச் சராசரியே அப் பிரிவின் நடுமதிப்பு (mid value) ஆகும். 0-20 என்ற பிரிவின் நடுமதிப்பு 10 ஆகும். பிரிவின் தூரங்கள், 0—10, 10—20, 20—30, ... என்ற பிரிவுகளில் அமைந்தவாறு சீராக (uniform) ஒரே மாதிரியும், 0—5, 5—20, 20—40, ... என்பன போன் பிரிவுகளாக சீரற்ற வேறுபட்ட நிலையிலும் அமைவதுண்டு. பிரிவுகள், 0—5, 5—10, 10—15, ... போன்ற அமைப்புகளில் இருந்தால், அவற்றை 0—5-க்குக் கீழ், 5—10-க்குக் கீழ், 10—15-க்குக் கீழ் என்ற பொருளைத் தருவன. 0—4, 5-9, 10—14 .... என்பன போன்ற பிரிவுகள் அமைந்தால் 0-லிருந்து 4 வரை (4 ஐச் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும்), 5-லிருந்து 9 வரை, 10-லிருந்து 14 வரை, ... என்ற பொருளைத் தருகின்றன. 0—4, 5—9, 10—14, ... என்பன போன்ற பிரிவுகளை மெய்ப்பிரிவுகளாக மாற்றியமைக்க விரும்பினால், பிரிவின் மேல்எல்லைக்கும், அதற்கு அடுத்தப் பிரிவின் கீழ் எல்லைக்குமுள்ள வேறுபாடான 1-ஐ, இரண்டால் வகுத்து (பாதியாக்கி), கிடைத்த மதிப்பினைக் (·5ஐ) கீழ் எல்லைகளிலிருந்து கழித்தும் மேல் எல்லைக்குக் கூட்டவும் வேண்டும். எனவே, மெய்ப்பிரிவுகள்: —.5—4·5, 4.5—9·5, 9·5—14.5, ... என்பனவாகும். சில தருணங்களில் நடு மதிப்புகள் (5, 15, 25, ...போன்ற) கொடுக்கப்பட்டு பிரிவுகள் அமைக்க வேண்டியிருப்பின், ஒரு பிரிவின் நடுமதிப்பிலிருந்து பிரிவுத் தூரத்தின் (10-ன்) சரிபாதியினைக் (5ஐ) கழித்தும், கூட்டியும் பெறபபடும் மதிப்புகள் அப் பிரிவின் கீழ், மேல் எல்லை

களாகக் கருதவேண்டும; பிரிவுகள்: 0 – 10, 0—20, 20 – 30, ... என்பனவாகும்.

அலைவுப் பட்டியல் அல்லது அலைவுப் பரவல் அமைத்தல்

(1) முதலில் வீச்சை (range) (கொடுக்கப்பட்ட பரவலில் மிகச் சிறிய குறிப்புக்கும், மிகப் பெரிய குறிப்புக்குமுள்ள வேறுபாடு வீச்சு எனப்படும்) தீர்மானிக்க வேண்டும். வீச்சைத் தெரிந்து கொண்டு, எத்தனைப் பிரிவுகள் தேவைப்படுகின்றன என்பதைத் தீர்மானித்துக் கொண்டால், பிரிவின் தூரத்தைத் (பிரிவு இடைவெளியின் அளவை) தீர்மானித்துவிடலாம். பிரிவுகள் எத்தனை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும், பிரிவு இடைவெளியின் அளவு எவ்வளவு இருக்கவேண்டும் என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விபரத்தினைப் பொறுத்ததாகும். பொதுவாக, எல்லாப் பிரிவுகளிலும் விவரங்கள் ஒரே சீராகப் பரவி அமைந்திருக்குமாறு பிரிவுகளை அமைத்தல் வேண்டும். நடைமுறையில், வசதிக்காக 3, 5, 10, 15 போன்ற அளவு பிரிவின் தூரமாகவும், 5 முதல் 15 வரை பிரிவுகள் கொண்டதாகவும் பரவல் அமைந்தால் நல்லது.

பிரிவு இடைவெளியின் அளவைக் குறைத்தால், பிரிவுகள் அதிகமாகிப் பட்டியலின் எளிமை குறைந்து, பிரிவுகளாகப் பிரிப்பதின் பலனை இழந்து விடுகிறோம்; பிரிவு இடைவெளியின் தூரம் அதிகமானால், விளக்கமாக இருக்கின்ற பல விவரங்களை இழந்துவிடுகிறோம் (பிரிவுகளில் மறைந்து விடுகின்றன); எனவே, இவற்றைக் கருத்தில் கொண்டு பிரிவு இடைவெளியின் அளவையும், மொத்தப் பிரிவுகளையும் தீர்மானிக்க வேண்டும். வீச்சை, மொத்தப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையால் (அல்லது பிரிவு இடைவெளியின் அளவால்) வகுத்தால், பிரிவு இடைவெளியின் அளவைத் (அல்லது பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை) தோராயமாகத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இம் முறையினால் கிடைக்கின்ற மதிப்பு பின்னமாக இருப்பின், அதற்கு அடுத்த நெருங்கிய முழு எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

(2) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளை மேலிருந்து கீழோ அல்லது கீழிருந்து மேலோ வரிசையாக முதல் பத்தியில் அமைக்க வேண்டும்.

(3) ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை மதிப்புகள் அடங்குகின்றன என்பதனைச் சரிபார்க்குங் குறிகளை (Tally marks) பயன்படுத்திக் கணக்கெடுத்து அந்தந்தப் பிரிவுகளுக்கு

எதிராகச் சரிபார்கும் குறிகளை இரண்டாம் பத்தியில் அமைக்க வேண்டும்; ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் பதிலாக ஒரு நேர் கோடிட்ட குறி (சரிபார்க்கும் குறி) இட வேண்டும். கணக்கெடுப்பதற்கு வசதியாக நான்கு நேர்கோடுகளும், ஒரு குறுக்குக் கோடும் (ꟷꟷ) இட்டு ஐந்துகுறிகள் கொண்ட குழுவாக அமைக்க வேண்டும்.

(4) சரிபார்க்கும் குறிகளின் எண்ணிக்கையை (அலைவுகளை) அந்தந்தப் பிரிவுகளின் எதிராக மூன்றும் பத்தியில் அமைக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்க்கண்ட விவரங்களை ஓர் அலைவுப் பட்டியலில் அமைக்கவும்

72	75	77	66	72	76
81	78	65	85	71	88
67	82	76	76	70	72
83	71	63	71	72	86
60	67	84	70	64	63

கொடுக்கபட்ட மதிப்புகளில் மிகச்சிறிய மதிப்பு = 60.
மிகப்பெரிய மதிப்பு = 88

∴ வீச்சு = 88 − 60 = 28.

பிரிவு இடைவெளியின் அளவு = 5 (என எடுத்துக் கொண்டால்)

பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$

= 6 (தோராயமாக)

5 ஐப் பிரிவு இடை வெளியின் அளவாகக் கொண்டு, 6 பிரிவுகள் கொண்ட அலைவுப் பரவல் அமைக்கலாம் பட்டியல் வருமாறு:

பிரிவுகள்	சரிபார்க்கும் குறிகள்	அலைவெண்
85 — 89	|||	3
80 — 84	||||	4
75 — 79	卌 |	6
70 — 74	卌 ||||	9
65 — 69	||||	4
60 — 64	||||	4
	மொத்தம்	**30**

குவிவுப் பட்டியல் (Cumulative frequency Table)

தனித்தனிப் பிரிவுகளாக அலைவுப் பட்டியல் அமைப்பதை விட, சில சமயங்களில் விவரங்களை அடியிற் கண்டவாறு குவிப்பாகப் பட்டியலில் அமைத்தல் ஏற்றதாக இருக்கும்.

பிரிவுகள்	அலைவெண்		குவிவு அலைவெண்
195–199	1	199–க்குக்கீழ்	30
190–194	2	194 ”	29
185–189	4	189 ”	27
180–184	10	184 ”	23
175–179	8	179 ”	13
170–174	5	174 ”	5

மேற்கண்ட பட்டியலில் அலைவெண்கள் கீழ் நோக்கிக் குவிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தப் பட்டியலைக் குவிவு அலைவுப்பட்டியல் என வழங்குகிறோம். குவிவு அலைவுப்பட்டியலைக் கீழ்க் கண்டவாறும் அமைக்கலாம்.

குவிவு அலைவெண்

195-க்கு மேல்		1
190	,,	3
185	,,	7
180	,,	17
175	,,	25
170	,,	30

மேற்கண்ட பட்டியலில் அலைவெண் குவிக்கப்பட்டுள்ளன (பிரிவுகளின் கீழ் [illegible] கொண்டு அலைவெண்கள் குவிக்கப்பட்டுள்ளன).

பயற்சி 1.

(1) அடியிற்கண்டவற்றில் தொடர்மாறி, தொடர்ச்சியற்ற மாறி ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடுக.

(a) ஒரு குடும்பத்தில் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை.

(b) கல்லூரி ஆசிரியர்களின் மாத வருமானம்.

(c) ஒரு தொழிற்சாலையில் தயார் செய்த ஆணிகளின் நீளம்.

(2) அடியிற் கண்டவற்றில், பெயரளவான மாறி, வரிசை மாறி, இடைவெளி மாறி, விகித மாறி ஆகியவற்றைக் குறிப்பிட்டுக் காட்டுக.

(a) பள்ளி மாணவர்களின் வயது.

(b) கண் நிறம்.

(c) பல்கலைக் கழகப் பரீட்சையில் மதிப்பெண்கள்.

(d) இனம் (sex).

(e) எதிர்வினை நேரம் (Reaction time).

(3) ஓர் உளச் சோதனையில் மாணவர்களின் நுண்ணறிவுக் கெழுக்கள் வருமாறு:

109	108	111	84	134
113	103	90	95	117
80	107	90	93	121
99	109	90	78	121
101	86	104	108	130
104	103	93	87	98
111	72	91	103	89
122	105	83	89	114
99	93	103	79	89
93	99	93	82	119

உற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுக.

(4) கீழ்க்கண்ட 40 எண்கள் ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் உளவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும். உற்றதோர் அலைவுப் பரவலிலும், குவிவு அலைவுப் பரவலிலும் அமைத்துக் காட்டுக.

42	37	87	73
96	52	98	73
83	53	66	81
52	49	69	88
44	72	67	89
88	76	91	62
80	77	93	69
62	75	54	75
65	79	56	80
71	80	59	79

(5) புள்ளியியலுக்கு விளக்கம் கூறி, அதனுடைய வரையறைகளையும் கூறுக.

(6) புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கும் வழிமுறைகளைச் சுருக்க மாகக் கூறி, வினுப்பட்டியல் உருவாக்கும் போது கவனிக்க வேண்டியவற்றைக் கூறுக.

(7) அலைவெண் பரவல் என்ருல் என்ன? அலைவெண் பட்டியல் அமைப்பதின் நோக்கம் யாது?

(8) பிரிவின் தூரம், பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை, பிரிவின் மைய மதிப்பு ஆகியவற்றைத் தீர்மானிக்கும்போது மனத்தில் கொள்ள வேண்டிய அடிப்படையான கருத்து யாது?

2. புள்ளி விவர விளக்கப்படங்களும் அலைவெண் வரைப் படங்களும்

(Statistical diagrams and Frequency graphs)

கண்டறிந்த விவரங்களை அப்படியே ஆராய்வதும், அவற்றிலிருந்து விளக்கம் தருவதும் கடினமான செயலாகும்; அவற்றிலிருந்து எளிதில் ஒன்றும் புலப்படாதாகையால், அவற்றைப் பாகுப்படுத்திப் பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டவேண்டுமென்பதை முன்பே கண்டோம். ஆனால், அவ் விவரங்களை விளக்கப் படங்களாகவும், வரைப்படங்களாகவும் அமைத்தால் அவை எளிதில் விரைவாகப் புரிந்துகொள்ளக் கூடியதாக இருக்கின்றன. சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் முடிவுகளைப் படங்களாக வடிவம் தந்து காட்டும்போது, விவரங்கள் சாதாரண மக்கள் மனத்திலும் உருப்பெறுகின்றன. மேலும், கண்டறிந்த விவரங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளை ஆராய்வதற்கு விளக்கப் படங்களும், வரைப்படங்களும் வழிசெய்கின்றன. அன்றாடம் பயன்படும் சில முக்கியமான விளக்கப்பட வகைகளையும், அலைவெண் வரைப்பட வகைகளையும் இங்கே தருவோம். கொடுக்கப் பட்டுள்ள விவரங்களின் தன்மையைக் கருத்தில் கொண்டு, பட வகையினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

I. விளக்கப் படங்கள்

(1) உருவ விளக்கப்படம் (Pictogram)
(2) பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar charts)
(3) வட்ட விளக்கப்படம் (Pie diagram)

II. அலைவெண் வரைப்படங்கள்

(1) அலைவெண் செவ்வகப்படம் (Histogram)
(2) அலைவுப் பலகோணம் (Frequency polygon)
(3) அலைவெண் வளைகோடு (Frequency curve)

(4) அலைவெண் குவிவு வளைகோடு (Cumulative frequencycurve)

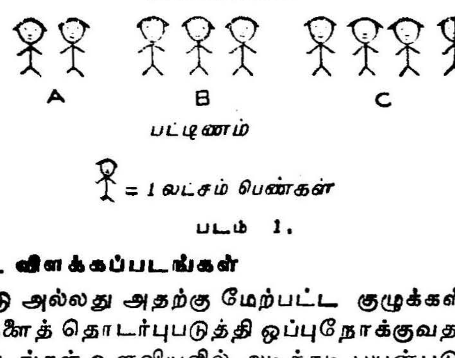
(5) குவிவு சதவீத வளைகோடும், ஒகைவும் (Cumulative percentage curve and Ogive)

I. விளக்கப் படங்கள் :

(1) உருவ விளக்கப்படம் : புள்ளி விவரங்களை அப்படியே புரிந்துகொள்ள முடியாதவர்களும் எளிதில் புரிந்து கொள்ள கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏற்ற உருவப்படங்கள் மூலமாக வர்ணிப்பது வழக்கமாகும். மனித உருவங்கள், வாகன உருவங்கள் போன்ற உருவங்கள் வரைந்து விவரங்களை விளக்குவதைப் பல்வேறு பொருட்காட்சி நிலையங்களில் சாதாரணமாகக் காணலாம். A, B, C என்ற மூன்று பட்டணங்களில் 1971ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகை (பெண்கள் மட்டும்) பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதனை விளக்கும் படம் கீழே (படம் 1) தரப்பட்டுள்ளது.

பட்டணம்	பெண்களின் எண்ணிக்கை (இலட்சத்தில்)
A	2·0
B	3·0
C	3·5

உருவப்படம்



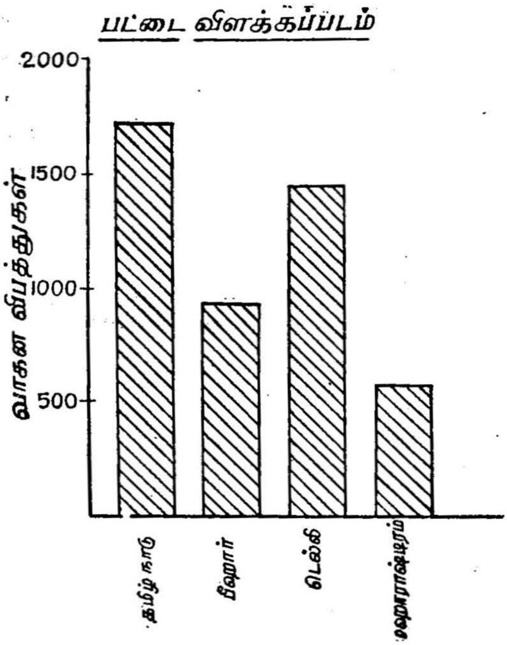
படம் 1.

(2) பட்டை விளக்கப்படங்கள்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குழுக்கள் பெற்றுள்ள சில பண்புகளைத் தொடர்புபடுத்தி ஒப்புநோக்குவதற்குப் பட்டை விளக்கப் படங்கள் உளவியலில் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பட்டைகளைச் செங்குத்தாகவோ (படம் 2-ல் கண்டபடி) அல்லது படுக்கையாகவோ வரையலாம். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கான பலவகை செவ்வகங்களைத் (பட்டைகளை) தனித்தனியாக இடைவெளிவிட்டு வரையவேண்டும். ஒரு பட்டைக்கும் அடுத்ததற்குமுள்ள இடைவெளி ஒரே மாதிரியாக (சம அளவில்) அமைதல் வேண்டும்; எல்லாப் பட்டைகளும்

ஒரே நிறத்தினைப் பெற்றிருக்கவேண்டும். கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கான படத்தின் அமைப்பு படம் 2-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1970ஆம் ஆண்டில் சில மாகாணங்களில் வாகன விபத்துகளின் பட்டியல் வருமாறு :

மாகாணங்கள்	வாகன விபத்துகளின் எண்ணிக்கை
தமிழ்நாடு	1729
பீஹார்	928
டெல்லி	1226
மஹாராஷ்டிரா	534



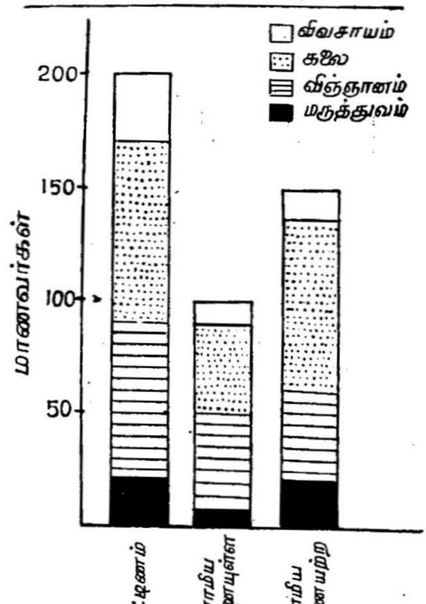
படம் 2.

கொடுக்கப்பட்ட மொத்த அமைப்பின் உட்பிரிவுகளாக உறுப்புகளை வெளிக்காட்டுவதற்குப் பட்டை விளக்கப்படங்கள் மிகச் சிறப்பாக உதவும். இத்தகைய உறுப்புகளைத் தனித்த மதிப்புகளாக அமைக்கலாம். ஒவ்வொரு பட்டையும் பலவாறு பிரித்துக் காட்டப்படும் அப் பட்டை விளக்கப்படங்களை 'பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படங்கள்' (Component bar charts) என வழங்குவர். கீழே கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுக்

கணக்குக்கான பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப்படம் படம் 3-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பாடத் திட்டம்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை		
	பட்டணம்	கிராமிய பண்ணையுள்ளவர்	கிராமிய பண்ணையற்றவர்
மருத்துவம்	20	8	21
விஞ்ஞானம்	68	42	39
கலை	82	38	75
விவசாயம்	30	12	15
மொத்தம்	200	100	150

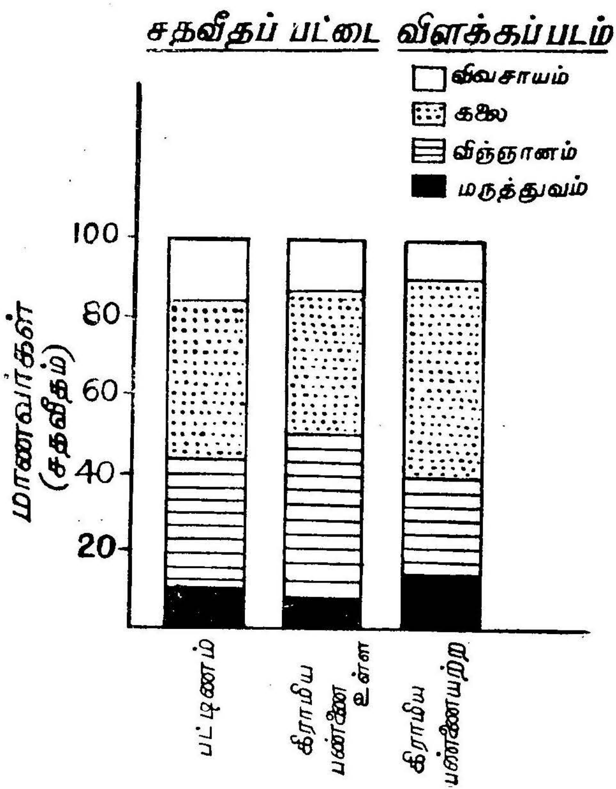
பல் அங்கப்பட்டை விளக்கப் படம்



படம் 3.

மொத்த அளவிலிருந்து உறுப்புகள் எந்த சதவீதத்தில் பகிர்வு பெற்றுள்ளன என்பதைப் பட்டை விளக்கப்பட மூலம் காட்டலாம். அத்தகைய பட்டை விளக்கப்படத்தை 'சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம்' (Percentage bar chart) என வழங்குவர். ஒவ்வொரு மொத்த அளவினையும் நூறாகக் கொண்டு, ஒவ்வொரு உறுப்பின் மதிப்புகளையும் ஏற்ற சதவீத எண்களில் அமைத்துப் படங்கள் வரையவேண்டும். அங்கு எல்லாப் பட்டைகளும் ஒரே நீளத்தில் அமைகின்றன. மேலே கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டான சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம் படம் 4-ல் கண்டபடி வரையலாம்.

பட்டணம் :	(சதவீதம்)	10	34	41	15
கிராமிய பண்ணையுள்ளவர் :	(,,)	8	42	38	12
கிராமிய பண்ணையற்றவர் :	(,,)	14	26	50	10



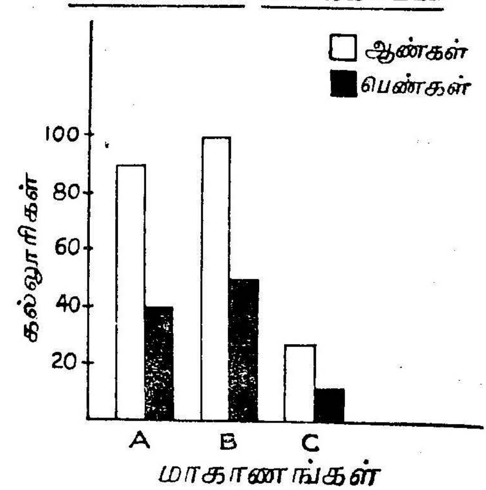
படம் 4.

புள்ளி விவரங்களை இணைத்து ஒப்பிட ஒப்பீட்டுப் பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Comparative bar charts) பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

மாகாணங்கள்	கல்லூரிகளின் எண்ணிக்கை	
	ஆண்கள்	பெண்கள்
A	90	40
B	100	50
C	25	12

இதனை விளக்கும் இணைப்பட்டை விளக்கப்படம் படம் 5–ல் தரப்பட்டுள்ளது.

இணைப்பட்டை விளக்கப் படம்



படம் 5.

(3) வட்ட விளக்கப்படம்

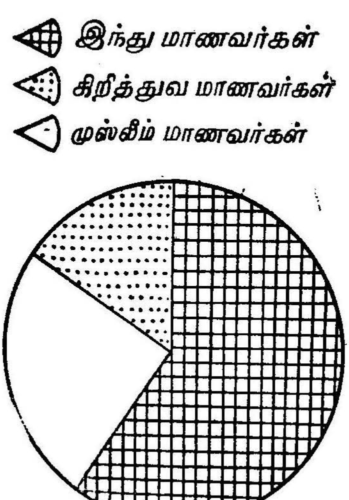
வட்டத்தைப் பலவாறு பிரித்துக் காட்டப்படும் வட்ட விளக்கப்படமும் உள. கொடுக்கப்பட்ட மொத்த அமைப்பின் உட்பிரிவுகளாக உறுப்புகளை ஒரு வட்டத்தின் பல அங்கங்களாகக் காட்டி விளக்கலாம். வட்ட விளக்கப் படத்தினை அமைக்கும் முறையைக் கவனிப்போம். வசதியான ஆரத்தில் வட்ட

மொன்று முதலில் வரையவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் மொத்தத்தை 360 பாகை எனக்கொண்டு, ஒவ்வோர் உறுப்பின் (அங்கத்தின்) மதிப்பையும் பாகைகளாக (degree) மாற்றவேண்டும். ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் ஏற்ற கோணத்தில் வட்ட வில்களைப் பிரிக்கவேண்டும். பிரிக்கப்பட்ட வட்டப்பகுதிகளை வெவ்வேறு வர்ணங்களில் காட்டவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கல்லூரியில் பல்வேறு மதங்களைச் சார்ந்த மாணவர்களின் பட்டியல் வருமாறு :

மதம்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
இந்து மாணவர்கள்	60
முஸ்லீம் மாணவர்கள்	25
கிறித்துவ மாணவர்கள்	15
	100

மொத்தத்தை (100ஐ) 360° எனக்கொண்டு, 60, 25, 15 ஆகியவற்றை முறையே 216°, 90°, 54° எனப் பாகைகளாக மாற்றவேண்டும். வரையப்பட்ட வட்டத்தை ஒவ்வோர்

வட்ட விளக்கப்படம்



படம் 6.

அங்கத்திற்கும் ஏற்ற கோணத்தில் (216°, 90°, 54°) பிரிக்க வேண்டும். பிரிக்கப்பட்ட வட்டப் பகுதிகளை வெவ்வேறு வண்ணங்களில் காட்டவேண்டும் (படம் 6.)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர்களின் விவரங்களை ஒப்பிடும்போது ஒவ்வொரு தொடரின் விவரங்களையும் ஒவ்வொரு வட்டத்தில் காட்டவேண்டும். ஒவ்வொரு தொடரின் கூடுதல் எண்ணிக்கைகளின் (மொத்தத்தின்) வர்க்க எண்களின் விகிதத்திற்கேற்ப ஆரங்களைப் பட அளவையில் எடுத்துக் கொண்டு வட்டங்கள் வரையவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு தொடர்களின் தனித்தனிக் கூடுதல் (மொத்தம்) 400, 256 என அமைந்தால், ஆரங்களை $\sqrt{400} : \sqrt{256}$ அல்லது 20 : 15 அல்லது 5 : 4 என்ற விகித அளவுகளில் (5 அங்., 4 அங். ஆரங்களில் இரண்டு வட்டங்கள் வரையலாம்)எடுத்துக்கொண்டு 2 வட்டங்கள் வரையவேண்டும்.

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் மாணவர்கள் விரும்பிப் படிக்கும் புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது.

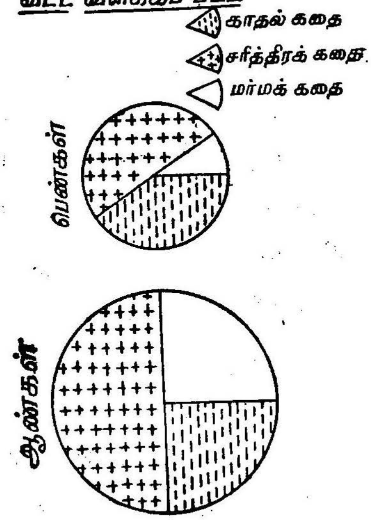
	விரும்பிப் படிக்கும் புத்தகங்கள்			
	சரித்திரக்கதை	காதல்கதை	மர்மக் கதை	மொத்தம்
ஆண்கள்	(180°) 128	(90°) 64	(90°) 64	256
பெண்கள்	(180°) 50	(144°) 40	(36°) 10	100

ஆரங்கள் $= \sqrt{256} : \sqrt{100} = 16 : 10 = 2.67 : 1.67.$

எனவே ஆரங்கள் : 2.67 செ. மீ, 1.67 செ. மீ. என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

இது வட்ட விளக்கப் படங்களில் அமைத்துத் தரப்பட்டுள்ளது (படம் 7).

வட்ட விளக்கப் படம்



படம் 7.

II. அலைவெண் வரைப்படங்கள்

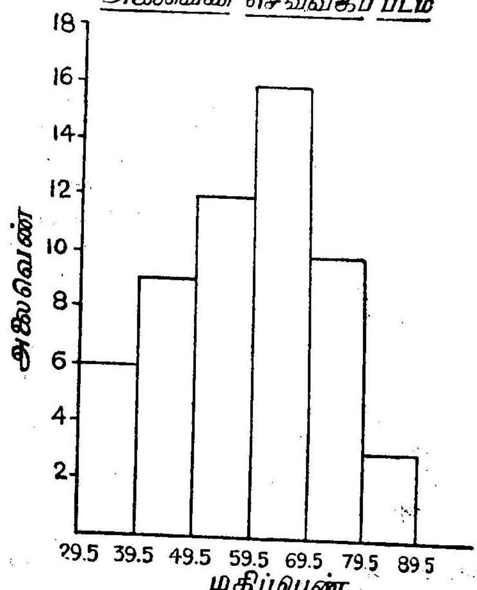
(1) அலைவெண் செவ்வகப் படம்: அலைவெண் செவ்வகப் படம் வரையும்போது, செவ்வகத்தின் உயரம் அலைவெண்ணுக் கேற்ப பட அளவையில் எடுத்துக் கொண்டும், அலைவுப் பரவலின் மெய்ப் பிரிவு இடைவெளி அளவினைப் பட அளவை யில் செவ்வகத்தின் அகலமாக எடுத்துக் கொண்டும் செவ்வகங் கள் வரைய வேண்டும். மெய்ப் பிரிவுகள் சீராகவோ அல்லது அவ்வாறின்றியோ இருக்கலாம். ஒரு செவ்வகத்திற்கும் அடுத்த தற்கும் இடைவெளியில்லாமல் செவ்வகங்கள் தொடர்ந்து அமைதல் வேண்டும். x அச்சு வழியே பிரிவு இடைவெளியை யும், y அச்சுவழியே பிரிவு அலைவுகளையும் ஏற்ற அளவுத்திட்டங் களைப் பயன்படுத்திக் குறிக்கவேண்டும். x அச்சில் 0–லி ருந்து தொடங்க வேண்டுமென்பதில்லை. ஒவ்வொரு செவ்வ கத்தின் பரப்பும் அதற்கிசைந்த விவரங்களின் எண்ணிக்கைக் குத் தக்கதாக அமைய வேண்டும்.

கீழ்க்காணும் அலைவுப்பரவலுக்குரிய அலைவெண் செவ்வகப் படம் வரைய, பிரிவுகளை மெய்ப் பிரிவுகளாக மாற்றிப் படம் 8–ல் கண்டபடி வரைய வேண்டும்.

சாதனைத் தேர்வு மதிப்புகள்	குழு. A f
80 — 89	3
70 — 79	10
60 — 69	16
50 — 55	12
40 — 49	9
30 — 39	6

மெய்ப் பிரிவுகள் :	79.5—89.5	69.5—79.5	59.5—69.5
அலைவெண் :	3	10	16
மெய்ப் பிரிவுகள் :	49.5—59.5	39.5—49.5	29.5—39.5
அலைவெண் :	12	9	6

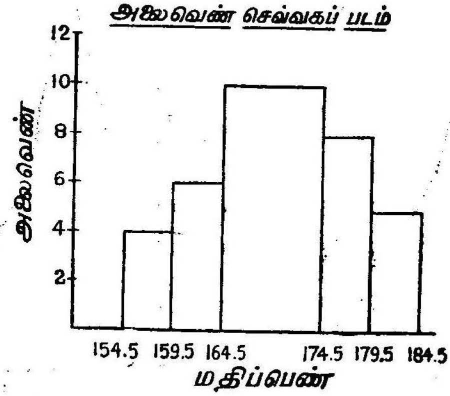
அலைவெண் செவவகப் படம்



படம் 8.

கீழ்க்காணும் அலைவுப் பரவலுக்குரிய அலைவெண் செவ்வகப் படம், படம் 9–ல் வரையப்பட்டுள்ளது.

ஆல்பா மதிப்புகள் (Alpha scores)	அலைவெண் *f*
180 — 184	5
175 — 179	8
165 — 174	20
160 — 164	6
155 — 159	4



படம் 9.

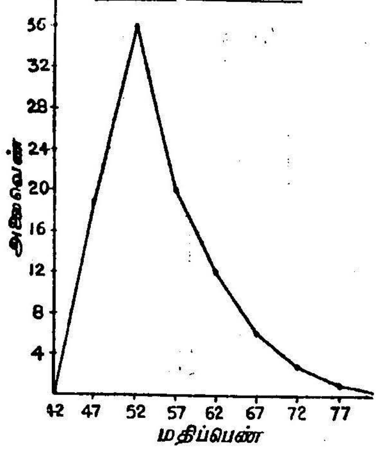
2·3. அலைவுப் பலகோணமும், அலைவெண் வளைகோடும்:

ஒரு பிரிவின் மைய மதிப்பினை மட்டாயமாகவும் (Abscissa), பிரிவு அலைவுகளைக் குத்தாயமாகவும் (Ordinates) கொண்டு எல்லாப் பிரிவுகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, அப் புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் சேர்த்தால் அலைவுப் பலகோணம் உருவாகும். அதே புள்ளிகளை வளைகோட்டினால் சேர்த்தால், அலைவுவெண் வளைகோடு உருவாகும். கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளில் கீழ்ப்பிரிவிற்குக் கீழே ஒரு பிரிவையும், மேல் பிரிவிக்கும் அடுத்ததாக ஒரு மேல் பிரிவையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றிற்கான அலைவெண்களை 0 வென எடுத்துக் கொண்டு இத்தகைய படங்களை வரைய வேண்டும்.

கீழ்க்காணும் அலைவுப் பரவலுக்குரிய அலைவுப் பலகோணம் படம் 10-லும், அலைவெண் வளைகோடு படம் 11-லும் காட்டப்பட்டுள்ளன.

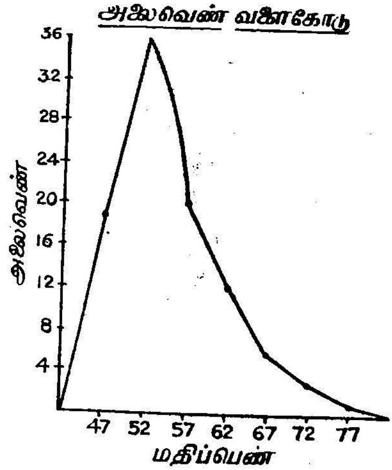
வாசிப்புத் திறமை சோதனை மதிப்புகள்	பள்ளி மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
74.5 — 79.5	1
69.5 — 74.5	3
64.5 — 69.5	6
59.5 — 64.5	12
54.5 — 59.5	20
49.5 — 54.5	36
44.5 — 49.5	19

அலைவுப் பலகோணம்



படம் 10.

அலைவெண் வளைகோடு



படம் 11.

(4) **அலைவெண் குவிவு வளைகோடு :** அலைவெண் குவிவு வளைகோட்டில் இரு வகையுண்டு. அவை : (1) கீழின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு. (2) மேலின அலைவெண் குவுவி வளைகோடு. கீழின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய அலைவுகளை மேல்நோக்கிக் குவிக்கப்பட வேண்டும். மேலின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய அலைவுகளைக் கீழ் நோக்கிக் குவிக்கப்பட வேண்டும்.

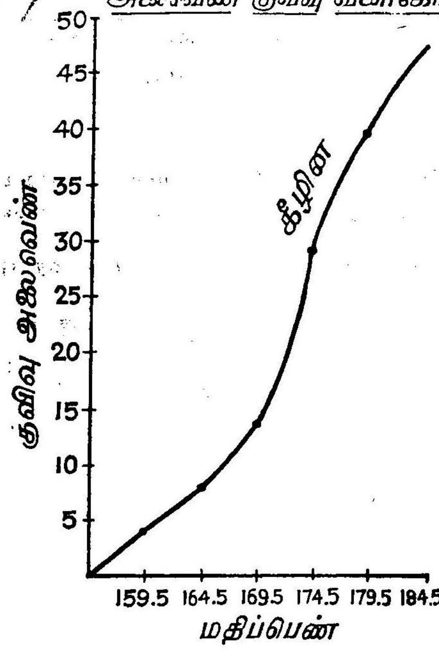
மெய்ப்பிரிவின் மேல் எல்லைகளை (கீழின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய) அல்லது மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லைகளை (மேலின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய) x அச்சிலும்,

குவிவு அலைவெண்களை y அச்சிலுமாக உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக் கொண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்க வேண்டும். பின் அப் புள்ளிகளை வளை கோடுகளால் சேர்த்தால், கீழின அலைவெண் குவிவு புள்ளி வளைகோடு அல்லது மேலின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு கிடைக்கும்.

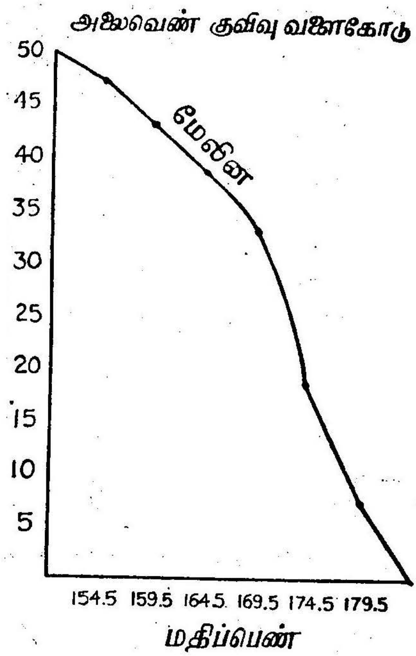
கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்குரிய அலைவெண் குவிவு வளைகோடுகள் (மேலின, கீழின) படம் 12-லும், படம் 13-லும் வரையப்பட்டுள்ளன.

ஆல்பா மதிப்புகள் (Alpha scores)	அலைவெண் f
180 — 184	8
175 — 179	10
170 — 174	15
165 — 169	6
160 — 164	4
155 — 159	4

அலைவெண் குவிவு வளைகோடு



படம் 12



படம் 13.

அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய மேற்கண்ட பட்டியலைப் பின்கண்டவாறு அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

(கீழின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய).

மெய்ப் பிரிவுகள்	f	மேல் எல்லைக்குக்கீழ்	குவிவு அலைவெண்
179.5 — 184.5	8	184.5-க்குக் கீழ்	47
174.5 — 179.5	10	179.5 ,,	39
169.5 — 174.5	15	174.5 ,,	29
164.5 — 169 5	6	169.5 ,,	14
159.5 — 164.5	4	164.5 ,,	8
154.5 — 159.5	4	159.5 ,,	4

(மேலின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய)

கீழ் எல்லைக்கு மேல்	குவிவு அலைவெண்
179.5-க்கு மேல்	8
174.5 ,,	18
169.5 ,,	33
164.5 ,,	39
159.5 ,,	43
154.5 ,,	47

கீழின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய மெய்ப் பிரிவின் மேல் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு அலைவெண்களை y அச்சிலும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். மேலின அலைவெண் குவிவு வளைகோடு வரைய மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு அலைவெண்களை y அச்சிலும் குறிக்க வேண்டும்.

5. குவிவு சதவீத வளைகோடும், ஓகைவும்: அலைவு பட்டியலில் அலைவுகள் மேல் நோக்கியோ அல்லது கீழ்நோக்கியோ குவிக்கப்பட்டு குவிவு அலைவெண் பட்டியல்கள் அமைப்பதைக் காட்டிலும் அலைவுகளைச் சதவீதங்களாக மாற்றி அச் சதவீத அலைவுகளைக் குவிப்பது பல சமயங்களில் வசதியாக இருக்கும். குறிப்பாக அலைவுப் பட்டியல்களை ஒப்பிடுவதற்குக் குவிவு சதவீதங்களே வசதியானதாகும். ஓகைவ் வரைகளில் மேலின ஓகைவ், கீழின ஓகைவ் என இரு வகைகள் உண்டு.

மேலின ஓகைவ் வரையும் முறை: (1) அலைவுப் பரவலின் பிரிவுகளை மெய்ப் பிரிவுகளாக அமைக்க வேண்டும். (2) மெய்ப் பிரிவின் கீழ் எல்லைகளைக் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு அலைவுகளை மேல் நோக்கிக் குவிக்க வேண்டும். (3) மேல் நோக்கிக் குவிக்கப்பட்ட குவிவு அலைவுகளைச் சதவீதமாக மாற்ற வேண்டும். (4) மெய்ப் பிரிவின் கீழ் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு சதவீத அலைவெண்களை y அச்சிலுமாக ஏற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக் கொண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அப் புள்ளிகளின் வழியே ஓர் இழைத்த வளைகோட்டை வரைய வேண்டும்.

கீழின ஓகைவ் வரையும் முறை : கீழின ஓகைவ் வரைய மெய்ப் பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகளைக் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு அலைவுகளைக் கீழ்நோக்கிக் குவிக்க வேண்டும். கீழ் நோக்கிக் குவிக்கப்பட்ட குவிவு அலைவுகளைச் சதவீத மாகமாற்ற வேண்டும். மெய்ப் பிரிவின் மேல் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு சதவீத அலைவெண்களை y அச்சிலும் எடுத்துக் கொண்டு, புள்ளிகளைக் குறித்து, அப் புள்ளிகளை வளை கோடுகளால் சேர்த்தால், கீழின ஓகைவ் கிடைக்கும்.

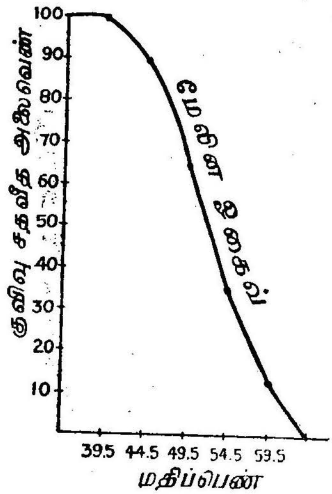
கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குரிய ஓகைவ், கீழின ஓகைவ் வரையவும்.

மதிப்புகள் (Scores)	அலைவெண் f
59.5 — 64.5	20
54.5 — 59.5	30
49.5 — 54.5	40
44.5 — 49.5	35
39.5 — 44.5	15
மொத்தம்	140

மேலின ஓகைவ் வரையப் பின் கண்டவாறு பட்டியலை அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லைக்கு மேல்	குவிவு அலைவெண்	குவிவு சதவீத அலைவெண் (மொத்த அலைவெண்ணை 100 என எடுத்துக் கொண்டு.)
59.5–க்கு மேல்	20	14.3
54.5 ,,	50	35.7
49.5 ,,	90	64.3
44.5 ,,	125	89.3
39.5 ,,	140	100

மெய்ப் பிரிவின் கீழ் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு சதவீத அலைவெண்களை y அச்சிலும் குறித்துக் கொண்டு படம் 14-ல் கண்டபடி வரைய வேண்டும்.

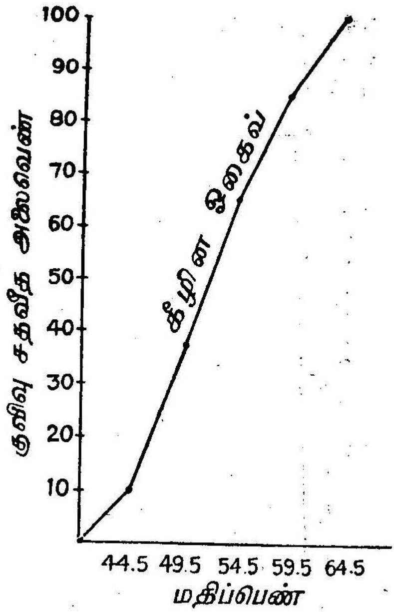


படம் 14.

கீழின ஒகைவ் வரைய பின்கண்டவாறு பட்டியல் அமைக்க வேண்டும்.

மெய்ப் பிரிவின் மேல் எல்லைக்குக் கீழ்	குவிவு அலைவெண்	குவிவு சதவீக அலைவெண் (மொத்த அலைவெண்ணை 100 எனக் கொண்டு.)
64.5க்குக் கீழ்	140	100
59.5 ,,	120	85.7
54.5 ,,	90	64.3
49.5 ,,	50	35.7
44.5 ,,	15	10.7

மெய்ப் பிரிவின் மேல் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு சதவீத அலைவெண்களை y அச்சிலும் எடுத்துக் கொண்டு படம் 15-ல் கண்டவாறு (கீழின) ஒகைவ் வரைய வேண்டும்.



படம் 15.

ஓகைவ் என மட்டும் குறிப்பிட்டால் அது கீழின ஓகைவ், மேலின ஓகைவ் இவையிரண்டில் ஏதாவது ஒன்றை மட்டும் குறிக்கும்.

பயிற்சி 2.

(1) கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரங்களைப் பல்அங்க பட்டை விளக்கப்படங்களிலும், சதவீத பல்அங்க பட்டைவிளக்கப் படங்களிலும் அமைத்துக் காட்டுக.

மாகாணங்கள்	கல்லூரிகள்	உயர் நிலைப் பள்ளிகள்	ஆரம்பப் பள்ளிகள்
A	90	195	505
B	100	201	603
C	45	120	550
D	120	300	850

(2) ஒரு கல்லூரியில் உள்ளவர்களில் 50% மாணவர்கள், 30% மாணவிகள், 10% ஆசிரியர்கள், மீதியுள்ளவர்கள் கல்லூரி

நிர்வாக சம்பந்தப்பட்டவர்கள். இதனை வட்ட விளக்கப் படத்தினில் அமைத்துக் காட்டுக.

3. கீழ்க்கண்ட அலைவு பரவலுக்கு, அலைவெண் வளைகோடு, செவ்வகப்படம், அலைவுப் பலகோணம், குவிவு அலைவெண் வளைகோடு, ஓகைவ் ஆகியவற்றை வரைந்து காட்டுக.

மதிப்புகள்	அலைவெண்
159.5—169.5	1
149.5—159.5	5
139.5—149.5	13
129.5—139.5	45
119.5—129.5	40
109.5—119.5	30
99.5—109.5	36
89.5— 99.5	10

4. விவரங்களை விளக்கப் படமாக அமைப்பதின் பயன்கள் யாவை? விளக்கப் படங்களில் எவையாகிலும் இரண்டை வரையும் முறையைக் கூறவும்.

5. வரைப்பட முறையை மேற்கொள்ளுகையில் அலைவுப் பரவலின் சிறப்புப் பண்கள் தெளிவாக வெளியாகின்றன — இந்தக் கூற்றை விளக்குக.

6. அலைவெண் செவ்வகப்படம், ஓகைவ் ஆகியவற்றை வரையும் முறையைக் கூறவும்.

3. மைய நிலைப்போக்கு அளவைகள்

அல்லது

இட அமைப்பு அளவைகள்

(Measures of Central tendency)
or Measures of Location)

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் பெருந்திரளாக அமைந்திருந்தாலும் அவை யாவும் மைய மதிப்பு ஒன்றினைச் சார்ந்தே அமைகின்ற தன்மையைப் பெற்றிருக்கின்றன. விவரங்கள் இந்த மைய மதிப்பிலிருந்து ஓர் ஒழுங்குடன் வேறுபடுவதையும், மைய மதிப்புக்கு நெருக்கமாகச் சார்ந்திருப்பதையும் காணலாம். எனவே, விவரங்களின் மையநிலைப் போக்கினை அளக்கும் அளவைகளுக்கு 'மையநிலைப் போக்கு அளவைகள்' அல்லது 'இட அமைப்பு அளவைகள்' எனப் பெயராகும். இத்தகைய அளவைகள் யாவும் சராசரிகள் (Averages) என்ற பொதுப்பெயரால் வழங்கப்படுகின்றன. விவரங்களின் மைய நிலைப் போக்கின் சராசரி என்ற தனி மதிப்பு சுட்டிக்காட்டும்.

ஒரு தனி மதிப்பின் மூலம் பரவலின் எல்லாத் தன்மைகளையும் அறியமுடியாவிட்டாலும், பரவல் முழுவதையும் தொகுத்து வெளியிடும் பிரதிநிதியாக அந்த மதிப்பு அமைகின்றது. சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் எல்லாவற்றையும் நினைவில் வைத்து, விவரங்களின் தன்மையை வருணிப்பதற்குப் பதிலாக, விவரங்களின் பிரதிநிதியாக ஒரு தனித்த மதிப்பைக் கொண்டு தன்மையை வருணிப்பது அர்த்தமுள்ளதாகவும், சிக்கனமானதாகவும் இருக்கும். ஒரு வகுப்பு மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் அவ் வகுப்பின் தரத்தினை எடுத்துக்

காட்டும். மேலும், ஒரு மாதிரியின் சராசரி அம்மாதிரி எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி விவரிக்கும் தன்மை வாய்ந்தது. ஒரு மாவட்டத்தில் குறிப்பிட்ட வகுப்பில் படிக்கும் மாணவர்களில் பிரதிநிதித்துவ மாதிரி முறையில் மாதிரி ஒன்றினை எடுத்து அம் மாதிரியில் அடங்கிய மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கொண்டு அம் மாவட்டத்தில் அந்தக் குறிப்பிட்ட வகுப்பில் படிக்கும் எல்லா மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைப்பற்றி விவரிக்கலாம். அடுத்ததாக, பல்வேறு பரவல்களை அல்லது குழுக்களை ஒப்பிடும்போது சராசரியை மேற்கொள்ளலாம். ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் ஒரு பாடத்தில் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்ணையும், மற்றொரு வகுப்பு மாணவர்கள் அதே பாடத்தில் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்ணையும் ஒப்பிட்டு, இவ்விரு வகுப்பு மாணவர்களில் எந்த வகுப்பு மாணவர்கள் அந்தப் பாடத்தில் சிறந்தவர்கள் என்பதைக் கூறலாம்.

மைய நிலைப்போக்கு அளவைகள்

(1) கூட்டுச் சராசரி (Arithemetic mean)

(2) இடைநிலை (Median)

(3) முகடு (Mode)

(4) பெருக்குச் சராசரி (Geometric mean)

(5) ஹார்மோனிக் சராசரி (Harmonic mean)

(1) கூட்டுச் சராசரி

சீர்படா விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி : கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கூட்டி, இக் கூடுதலை விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கவேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கும் மதிப்புதான் அவ் விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி எனச் சொல்லப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் $X_1, X_2, \ldots x_N$ என்பன N மதிப்புகள் எனில், இவற்றின் கூடுதல் $= X_1 + X_2 + \ldots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

இக் கூடுதலைக் கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் அடங்கும் மதிப்பு

களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் (n ஆல்) வகுக்கவேண்டும். எனவே,

$$\frac{X_1+X_2+ \ldots\ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

என்பது அந்தத் தொடரின் கூட்டுச் சராசரியாகும். இதனை $\bar{X}$ என்ற அடையாளத்தால் குறிப்பிடுவது மரபு*.

எனவே, $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

2, 8, 7 3, 4, 4, 7

மேலே தரப்பட்ட தொடரில் அடங்கும் விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி யாது ?

விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $(N)=7$. கொடுக்கப் பட்ட விவரங்களைக் கூட்டி, 7-ஆல் வகுத்தால், கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கும். அதாவது,

$$\bar{X}= \frac{2+8+7+3+4+4+7}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

எனவே,

கூட்டுச் சராசரி = 5

கூட்டுச் சராசரியைக் குறிப்பிடும்போது அலகு அளவை யால் குறிப்பிடவேண்டும்,

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அதாவது அலைவுப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி : விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது தொகுக்கப்படாத விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைக் கணிப்பதைவிட, விவரங்களைத் தொகுத்து

---

* முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியினை μ (மியு) என்ற அடையாளத்தாலும், மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியினை $\bar{X}$ என்ற அடையாளத்தாலும் குறிப்பது மரபு,

அலைவுப் பட்டியலாக அமைத்து இப் பட்டியலுக்குச் சராசரியினைக் கணிப்பது எளிதாகும். நடைமுறைக்குச் சிறந்தது ஆகும்.

பரவலின் ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய மதிப்பினை அந்தப் பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் (பிரிவு அலைகளால்) பெருக்கவேண்டும். இவ்வாறு கிடைக்கின்ற பெருக்குத் தொகைகளைக் கூட்டி, இக் கூட்டுத்தொகையை மொத்த விவரங்களால் வகுத்தால், அப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலில் $X_1, X_2, \ldots\ldots X_M$ என்பன M பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகள் என்க.

$f_1, f_2, \ldots\ldots f_M$ என்பன அவைகளின் முறையே அலைவெண்கள் என்க.

$f_1X_1+f_2X_2+\ldots\ldots+f_MX_M = \sum_{i=1}^{M} f_iX_i$ என்பது பரவலின் கூட்டுத் தொகை.

$\sum_{i=1}^{M} f_i X_i$ ஐ மொத்த அளவெண்களால் வகுத்துக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணிக்கவேண்டும்.

எனவே,

கூட்டுச் சராசரி $(\overline{X})$ =

$$\frac{f_1X_1+f_2X_2+\ldots\ldots+f_MX_M}{f_1+f_2+\ldots\ldots f_M} = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{M} f_i}$$

$\sum_{i=1}^{M} f_i = N$ எனில்;

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_i X_i}{N}$$

அலைவுப் பட்டியலின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணிக்கும் போது பிரிவின் நடு மதிப்பைப் பயன்படுத்துவதைக் கவனிக்க

வேண்டும். பிரிவுகளில் அடங்கும் ஒவ்வொரு விவரத்தின் மதிப்பும் நமக்குத் தெரியாது. ஆனால், பிரிவுகளில் அடங்கும் விவரங்களின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். ஆகவே, பிரிவின் நடுமதிப்பை அப்பிரிவில் அடங்கும் விவரங்களின் பிரதிநிதியாக எடுத்துக் கொள்கிறோம். அதாவது, பிரிவின் அலைவெண்ணுக்குரிய மதிப்பாக அப்பிரிவின் நடுமதிப்பை எடுத்துக் கொள்கிறோம். விவரங்கள் எல்லாப் பிரிவுகளிலும் சீராகப் பரவியிருக்கும்போது, இவ்வாறு புனைந்து கொள்வதினால் விளையக்கூடிய பிழைகள் குறைவாகவே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு: கீழ்கண்ட அலைவுப் பட்டியலில், 50 பள்ளி மாணவர்கள் பொதுத் திறமைச் சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
55—59	1
50—54	1
45—49	3
40—44	4
35—39	6
30—34	7
25—29	12
20—24	6
15—19	8
10—14	2
மொத்தம்	50

கணிக்கும் முறை

(1) ஒவ்வொரு பிரிவிலும், பிரிவின் நடு மதிப்பை 2ஆம் பத்தியில் எழுதவும்.

(2) ஒவ்வொரு பிரிவு நடு மதிப்பையும் அதன் அலைவெண்ணால் பெருக்குத் தொகையை 3 ஆம் பத்தியில் எழுதவும்.

(3) 3ஆம் பத்தியில் கண்டவற்றைக் கூட்டவும்.

(4) இக் கூடுதலை மொத்த அலைவெண்களால் வகுக்கவும். இவ்வாறு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும்.

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் இம் முறையைத் தெளிவாக விளக்குகிறது.

(1) பிரிவு இடைவெளி	(2) பிரிவின் நடுமதிப்பு X_i	(3) அலைவெண் f_i	(4) பிரிவின் நடுமதிப்பு X_i அலைவெண் $X_i f_i$
55–59	57	1	$57\times 1= 57$
50–54	52	1	$52\times 1= 52$
45–49	47	3	$47\times 3=141$
40–44	42	4	$42\times 4=168$
35–39	37	6	$37\times 6=222$
30–34	32	7	$32\times 7=224$
25–29	27	12	$27\times 12=324$
20–24	22	6	$22\times 6=132$
15–19	17	8	$17\times 8=136$
10–14	12	2	$12\times 2= 24$
மொத்தம்		50 $(N=) \sum_{i=1}^{10} f_i$	1480 $\sum_{i=1}^{10} f_i X_i$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{\sum f_i X_i}{N} = \frac{1480}{50}$$

$$= 29.60$$

$\therefore$ கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் $= 29.60$

கூட்டுச் சராசரியினைக் காணக் குறுக்கு வழி (தொகுக்கப் படாத விவரங்களுக்கு) : தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும் போதும், விவரங்களின் மதிப்புகள் பெரிய எண்களாக இருக்கும் போதும் கூட்டுச் சராசரியினைக் கணிக்கும் முறையை எளிமைப்படுத்தலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் N மதிப்புகளை $X_1, X_2, X_3 \ldots X_N$ என்க.

A என்ற எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களை அளக்கவும். இங்கு A என்பது ஒரு நிலையெண்ணாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள N மதிப்புகளில் ஏதாவது ஒன்றை Aஆகக் கொள்ளலாம்.

அதாவது,

$$d_1 = X_1 - A$$

$$d_2 = X_2 - A$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$d_N = X_N - A$$

என விலக்கங்களை $d_1, d_2, \ldots d_N$ என்பதால் குறிக்கவும்.

குறிகளையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு இவ் விலக்கங்களைக் கூட்ட வேண்டும்.

அதாவது, A-யினின்று கண்ட விலக்கங்களை இயல் கணிப்புக் (Algebraic) கூடுதலில் காண்க.

இக் கூடுதலை விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் (Nஆல்) வகுக்கவும்.

கிடைக்கின்ற மதிப்பை (இயல் கணிப்பு மதிப்பாக) எதேச்சை மூலத்துடன் (A-யுடன்) கூட்டினால் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கும்.

எனவே, கூட்டுச் சராசரி ($\overline{X}$) =

$$= A + \frac{(X_1 - A) + (X_2 - A) + \dots + (X_N - A)}{N}$$

$$= A + \frac{(d_1 + d_2 + \dots + d_N}{N}$$

$$= A + \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

112, 115, 116, 117, 116 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

இங்கு, குறிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை (N) = 5.

115 ஐ எதேச்சை மூலமாக எடுத்துக் கொண்டால்,

$$d_1 = 112 - 115 = -3$$

$$d_2 = 115 - 115 = 0$$

$$d_3 = 116 - 115 = 1$$

$$d_4 = 117 - 115 = 2$$

$$d_5 = 116 - 115 = 1$$

ஆகவே,

$$\overline{X} = 115 + \frac{-3 + 0 + 1 + 2 +}{5}$$

$$= 115 + \tfrac{1}{5}$$

$$= 115 + \cdot 2 = \mathbf{115.2}$$

கூட்டுச் சராசரியினைக் காணக் குறுக்கு வழி (அலைவுப் பரவலுக்கு) : விபரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாகவும், குறிப்பாகப் பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகள் பெரிய எண்களாகவும் இருப்பின், இம் முறை கணிப்பினை எளிதாக்கும். மேலும், நேரத்தை மிச்சப்படுத்தும்.

$X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலின் பிரிவு நடு மதிப்புகள் என்க.

$f_1, f_2 \ldots f_n$ என்பன அவற்றின் முறையே அலைவெண்கள் என்க.

A என்பது சராசரியல்லாத பிறிதோர் எதேச்சை மூலம் என்க.

$$d_1 = X_1 - A$$

$$d_2 = X_2 - A$$

$$\vdots$$

$$d_n = X_n - A$$

$d_1, d_2, \ldots d_n$ என்பன பிரிவின் நடு மதிப்புகள், எதேச்சை மூலத்தினின்று பெற்றுள்ள விலக்கங்கள் என்க.

பிரிவின் தூரங்கள் (Class interval) சீராக ஒரே மாதிரி அமைந்திருந்தால்,

$$d_1 = \frac{X_1 - A}{C}$$

$$d_2 = \frac{X_2 - A}{C}$$

$$d_n = \frac{X_n - A}{C}$$

எனக் கொள்க.

அதாவது, ஒவ்வொரு பிரிவின் நடு மதிப்பு எதேச்சை மூலத்திலிருந்து பெரும் விலக்கத்தைப் பிரிவின் இடைவெளி (பிரிவின் தூரம்) அலகுகளில் மாற்றி அமைத்துக் கொள்க.

எனில்,

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } (\overline{X}) = A + \frac{f_1 d_1 + f_2 d_2 \ldots f_n d_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$= A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

$$= A + \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)$$

இங்கு $d_i = X_i - A$

$$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

[$d_i = \dfrac{X_i - A}{C}$ எனில், கூட்டுச் சராசரி $(\overline{X}) = A + \left(\dfrac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C\right)$

இங்கு C என்பது பிரிவு இடைவெளி.]

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஓர் ஆளுமைச் சோதனையில் 76 நபர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கூட்டுச் சராசரியினைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	நபர்களின் எண்ணிக்கை
45—49	1
40—44	2
35—39	3
30—34	6
25—29	8
20—24	17
15—19	26
10—14	11
5— 9	2
0— 4	0
மொத்தம் ...	76

கணிக்கும் முறை

1. பரவலுடைய மையத்திற்கு அண்மையில் உள்ள பிரிவின் நடு மதிப்பை (22) எதேச்சை மூலமாகத் தேர்ந்தெடுக்கவும். பொதுவாக, சமச்சீரான பரவலில் (ஓரளவுக்குச் சமச்சீருடைய பரவலில்) பரவலின் மையத்திற்கு அண்மையில் உள்ள பிரிவின் நடு மதிப்பையும், மற்ற பரவலுல், அதிகமான அளவெண்ணையுடைய பிரிவின் நடு மதிப்பை எதேச்சை மூலமாகத் தேர்ந்தெடுப்பது கணிப்பினை எளிதாக்கும்.

2. ஒவ்வொரு பிரிவிலும் நடு மதிப்பை 2ஆம் பத்தியில் எழுதவும்.

3. ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள நடு மதிப்பும், எதேச்சை மூலத்திலிருந்து (22–லிருந்து) பெறும் விலக்கத்தைப் பிரிவு இடைவெளி (5) அலகுகளில் மாற்றி 3ஆம் பத்தியில் அமைக்கவும் [எடுத்துக்காட்டாக, $d_1 = \frac{47-22}{5} = 25/5 = 5$].

4. குறிகளையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவு விளக்கத்தையும், அதன் அலைவெண்களால் பெருக்கி, 5ஆம் பத்தியில் அமைக்கவும்.

5. 5ஆம் பத்தியில் கண்டவற்றை இயல் கணிப்புக் கூடுதலில் காண்க.

6. இக் கூடுதலை மொத்த அலைவெண்களால் (76ஆல்) வகுக்கவும். வகுத்த பிறகு பிரிவு இடைவெளியால் பெருக்கவும்.

7. இதனை எதேச்சை மூலத்துடன் கூட்டினால், கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கும்.

கீழ்க்காணும் பட்டியல் கணிக்கும் முறையைத் தெளிவாக்கும்.

(1) பிரிவு-இடைவெளி	(2) பிரிவின் நடு மதிப்பு X_i	(3) விலக்கங்கள் $d_i=\frac{X_i-22}{5}$	(4) அலைவெண் f_i	(5) $f_i d_i$
45—49	47	5	1	5
40—44	42	4	2	8
35—39	37	3	3	9
30—34	32	2	4	12
25—29	27	1	8	8
20—24	22	0	17	0
15—19	17	−1	26	−26
10—14	12	−2	11	−22
5— 9	7	−3	2	− 6
0— 4	2	−4	0	0
மொத்தம்	......	......	76 N	−12 $\Sigma f_i d_i$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right) \times C$$

$$= 22 + \left(\frac{-12}{76}\right) \times 5$$

$$= 22 + \frac{-60}{76}$$

$$= 22 - \cdot 79$$

$$= 21 \cdot 2$$

கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் = 21·21.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பட்டியலிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியினைக் காண்க.

பிரிவு-இடைவெளி :	25 – 45	15 – 25	10 – 15	5 – 10	0 – 5
அலைவெண் :	1	2	7	6	4

எதேச்சை மூலம் (A) = 12·5

(1) பிரிவு இடைவெளி	(2) பிரிவின் நடு மதிப்பு X_i	(3) விலக்கங்கள் $d_i = X_i - A$	(4) அலைவெண் f_i	(5) $f_i d_i$
25—45	35	22·5	1	22·5
15—25	20	7·5	2	15·0
10—15	12·5	0	7	0
5—10	7·5	– 5	6	–30
0— 5	2·5	–10	4	–40
மொத்தம்	......	......	20 N	–32·5 $\sum f_i d_i$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } (\overline{X}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N}$$

$$= 12.5 + \frac{-32.5}{20}$$

$$= 12.5 - 1.625$$

$$= 10.875$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

மதிப்புகள் X_i	அலைவெண் f_i	விலக்கங்கள் $d_i = X_i - 2141.5$	$f_i d_i$
2152.5	2	11	22
2132.5	2	− 9	− 18
2134.25	1	− 7.25	− 7.25
2145	1	3.5	3.5
2142.5	2	1	2
2146.25	2	4.75	9.5
2130	1	− 11.5	− 11.5
2150	1	8.5	8.5
2135	1	− 6.5	− 6.5
மொத்தம்	13	மொத்தம்	2.25

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = 2141.5 + \frac{2.25}{13}$$

$$= 2141.5 + 0.17$$

$$= 2141.67.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

கீழ்க்கண்ட பட்டியலிலிருந்து மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் காண்க.

மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-க்கு மேல்	80
10-க்கு மேல்	77
20 ,,	72
30 ,,	65
40 ,,	55
50 ,,	43
60 ,,	28
70 ,,	16
80 ,,	10
90 ,,	8
100 ,,	0

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களை 0 — 10 10 — 20, 20 — 30, ... எனப்பிரிவுகளாக அமைக்கலாம். 0-க்கு மேல் மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்கள் 80 ஆனால் 10-க்கு மேல் பெற்றவர்கள் 77. ஆகவே, 0-லிருந்து 10 பெற்றவர்கள் 3 (80—77). இதே போல் 10—20 மதிப்பெண் பெற்றவர் 5 (77—72). இதே போல் மற்றவைகளும். கூட்டுச் சராசரியினைக் கணிக்கும் முறையை அடுத்து வரும் பட்டியல் விளக்குகிறது.

மதிப்பெண் பிரிவுகள்	X_i பிரிவின் நடுமதிப்பு	f_i அலைவெண்	$d_i = \frac{X_i - 55}{10}$ விலக்கங்கள்	$f_i d_i$
0— 10	5	3	−5	−15
10— 20	15	5	−4	−20
20— 30	25	7	−3	−21
30— 40	35	10	−2	−20
40— 50	45	12	−1	−12
50 — 60	55	15	−0	0
60 — 70	65	12	1	12
70— 80	75	6	2	12
80— 90	85	2	3	6
90—100	95	8	4	32
மொத்தம்	...	80		−26

$$\bar{X} \text{(கூட்டுச் சராசரி)} = 55 + \frac{-26}{80} \times 10$$

$$= 55 - 3.25$$

$$= 51.75$$

கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்பியல்புகள்

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி விவரங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்,

X_1, $X_2 \ldots X_N$ ஆகிய விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{X}$ என்க.

$(X_1 - \bar{X})$, $(X_2 - \bar{X}) \ldots (X_N - \bar{X})$ என்பன கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கண்ட விவரங்களின் விலக்கங்கள் என்க.

எனவே, இவ் விலக்கங்களின் கூடுதல் =

$$(X_1 - \bar{X})(X_2 - \bar{X}) + \dots + (X_N - \bar{X})$$

$$= (X_1 + X_2) + \dots X_N) - (\bar{X} + \bar{X} + \dots N \text{ தடவைகள்})$$

$$= \sum_{i\ 1}^{N} X_i - N\bar{X}$$

$$= N\bar{x} - N\bar{X} = 0$$

$$\left[\because \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \text{ அல்லது } N\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i\right]$$

ஆகவே,

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{x}) = 0 \text{ [தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு]}$$

எடுத்துக் காட்டாக, 7, 13, 22, 9, 11, 4 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 11. கூட்டுச் சராசரியினின்று எடுக்கப்பட்ட தனி விவரங்களின் விலக்கங்கள் :

$$-4, 2, 11, -2, 0, -7.$$

இவற்றின் கூடுதல்

$$-4 + 2 + 11 - 2 + 0 - 7 = 0$$

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரியினின்று எடுக்கப்பட்ட தனி விவரங்களின் விலக்கக் கூடுதல் 0. ஓர் அலைவுப் பரவலுக்கு $\Sigma f_i (X_i - \bar{X}) = 0$ ஆகும்.

(2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலே மிகச் சிறியதாகும். அதாவது, கூட்டுச் சராசரியல்லாத பிறிதோர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலைவிட கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக்கூடுதல் சிறியதாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

7, 13, 22, 9, 4 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 11. கூட்டுச் சராசரியினின்று (11-லிருந்து) எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்கள் :
—4, 2, 11,—2,0, —7.

இவற்றின் வர்க்கங்கள் : 16, 4, 121, 4, 0, 49

இவற்றின் கூடுதல் : 194

கூட்டுச் சராசரியல்லாத பிறிதோர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து (13—லிருந்து) எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்கள் :

—6, 0, 9, 4, 2, — 9

இவற்றின் வர்க்கங்கள் : 36, 0, 81, 16, 4, 81.

இவற்றின் கூடுதல் : 218.

ஆகவே, 218, கூட்டுச் சராசரியினின்று எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலை விடப் பெரியதாகும். 13 அல்லாது வேறொரு மதிப்பை எதேச்சை மூலமாக எடுத்தாலும், முடிவு மேற் கூறியவாறே இருக்கும்.

(3) இணைந்த குழுக்களின் கூட்டுச் சராசரி :

N_1 விவரங்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் சராசரி $\overline{X_1}$ என்க.

N_2 விவரங்கள் கொண்ட பிறிதோர் குழுவின் கூட்டுச் சராசரி X_2 என்க. எனில், இவ்விரண்டும் இணைந்த $(N_1 + N_2)$ விவரங்கள் கொண்ட குழுவின் கூட்டுச் சராசரி (இணைந்த)

$$\overline{X} = \frac{N_1 \overline{X}_1 + N_2 \overline{X}_2}{N_1 + N_2} \text{ ஆகும்.}$$

இத்தகைய M குழுக்களை எடுத்துக் கொண்டால், இணைந்த கூட்டுச் சராசரி :

$$\overline{X} = \frac{N_1 \overline{X} + N_2 \overline{X}_2 + \dots + N_M \overline{X}_M}{N_1 + N_2 + \dots + N_M}$$

எடுத்துக்காட்டாக, 1, 3, 8, 8 ஆகிய 4 விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி 5 : 4, 4, 5, 6, 8, 15 ஆகிய 6 விவரங்களின்

கூட்டுச் சராசரி 7 : இவை இரண்டும் இணைந்த 10 விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\overline{X} = \frac{(4 \times 5) + (6 \times 7)}{4 + 6} = 6.2.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்க் கண்ட அலைவுப் பரவலில் ஒரு பிரிவின் அலைவெண் தெரியவில்லை. அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 21 எனில், காணாமற் போன அலைவெண்ணைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பு	அலைவெண்
5 — 15	2
15 — 25	(?)
25 — 35	3

காணாமற் போன அலைவெண்ணை x என்க எனில்,

மதிப்பு	(f) அலைவெண்	(X) மைய மதிப்பு	$f \cdot X$
5 — 15	2	10	20
15 — 25	x	20	$20x$
25 — 35	3	30	90
மொத்தம்	$5 + x$	மொத்தம்	$110 + 20x$

$N = \Sigma f =$ மொத்த அலைவெண் $= 2 + x + 3 = 5 + x$

$\Sigma f \cdot X = 20 + 20x + 90 = 110 + 20x$

$$\therefore \ \overline{X} = \frac{\Sigma f \cdot X}{N} = \frac{110 + 20x}{5 + x}$$

ஆனால் $\overline{X}$ (கூட்டுச் சராசரி 21 என) கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்

$$21 = \frac{110 + 20x}{5 + x}$$

அல்லது $21(5 + x) = 110 + 20x$

அல்லது $105 + 21x = 110 + 20x$

அல்லது $21x = 110 + 20x - 105$

அல்லது $21x - 20x = 110 - 105$

$\therefore \quad x = 5$

எனவே,

காணமற் போன அலைவெண் $(x) = 5$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கூட்டுச் சராசரியான 50-லிருந்து விலக்கங்கள் கண்ட 10 விவரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 225. எதேச்சை மூலமான 60-லிருந்து விலக்கங்கள் கண்ட அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. $\overline{X} = 50$

மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை $= N = 10$

$$\Sigma (X_i - \overline{X})^2 = 225$$

அதாவது

$$\Sigma (X_i - 50)^2 = 225 \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.)}$$

இப்போது

$\sum (X_i - 60)^2$-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$$\sum (X_i - 60)^2 = \sum [(X_i - (50 + 10)]^2$$
$$= \sum [(X_i - 50) - 10]^2$$
$$= \sum [(X_i - 50)^2 - 2 (X_i - 50) 10 + 10^2]$$
$$[\because \sum (a - b)^2 = \sum (a^2 - 2ab + b^2)]$$

$$= \sum (X_i - 50)^2 - 20 \sum (X_i - 50) + \sum 10^2$$

$$= \sum (X_i - 50)^2 - 0 + 10 \times 10^2 \; [\because \sum(\overline{X_i - X}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{10} 10^2 = 10 \times 10^2]$$

$$= \sum (X_i - 50)^2 + 1000$$

$$= 225 + 1000 \; (\because \sum (X_i - 50)^2 = 225 \text{ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது})$$

$$= 1225$$

$$\therefore \sum (X_i - 60)^2 = 1225$$

60-லிருந்து விலக்கம் கண்டால், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 1225 ஆகும்.

(2) இடை நிலை

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறு வரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப் படுத்தினல், மதிப்புகளின் நடு மதிப்பினை இடை நிலை (Median) யாகக் கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது விவரங்களை மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப்படுத்தினல், மொத்த விவரங்களில் பாதி (50 சதவீதம்) மேலேயும், பாதி (50 சதவீதம்) கீழேயும் அமையுமாறு பிரிக்கின்ற மாறியின் மதிப்பே (புள்ளி) இடைநிலை அகும்.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு இடை நிலை

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை முதலில் (ஏறும், அல்லது இறங்கும் வரிசையில்) வரிசைப் படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். அவ் வரிசையில் ஒற்றைப்படை எண்களிருப்பின், நடு மதிப்பே இடை நிலையாகும்: அவ் வரிசையில் இரட்டைப் படை எண் களிருப்பின் நடு இரு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியை இடை நிலையாக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

அதாவது, மொத்த விவரங்கள் N என்க.

N ஒற்றைப்படையாகில்,

இடை நிலை = வரிசையில் (மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப்படுத்தின பிறகு) $\frac{N+1}{2}$ ஆவது மதிப்பு.

N இரட்டைப்படையானல்,

இடைநிலை = வரிசையில் (மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப் படுத்திய பிறகு) $\frac{N}{2}$ ஆவது மதிப்பு, $\frac{N}{2}+1$ ஆவது மதிப்பு ஆகியவற்றின் கூட்டுச்சராசரி.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

4, 3, 1, 7, 8, 5, 9 ஆகியவற்றின் இடைநிலை காண்க.

ஏறும் வரிசையில் மதிப்பிற்கேற்ப எழுதினல் 1, 3, 4 (5), 7, 8, 9

மொத்த விவரங்கள் 7 (ஒற்றைப்படை) வரிசையில், $\frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ஆவது மதிப்பு இடை நிலையாகும்.

∴ இடைநிலை = 5

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

8, 7, 9, 11, 15, 6 ஆகியவற்றின் இடை நிலையாது? மதிப்பு களை வரிசைப்படுத்தினால், 6, 7, 8, 9, 11, 15. மொத்த விவரங் கள் 6 (இரட்டைப் படை). வரிசையில், $\frac{6}{2} = 3$ஆவது மதிப்பும், $\frac{6}{2} + 1 = 4$ஆவது மதிப்பும், நடு மதிப்புகளாகும், அதாவது நடு மதிப்புகள் 8, 9. இவ்விரு மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியே இடை நிலையாகும். அதாவது, $\frac{8+9}{2}$ இடைநிலையாகும்.

∴ இடைநிலை = 8.5

அலைவுப் பரவலுக்கு இடைநிலை

விவரங்கள் அலைவுப் பரவலாக இருக்கும்போது இடைநிலை யைக் காணும் முறை சற்று சிக்கலாக இருக்கும். விவரங்களின் மதிப்புகள் பிரிவு இடைவெளிகளில் அடைந்து வெளிப்படையா கத் தெரியாமலிருப்பதால், மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப்படுத்திய விவரங்களின் நடுமதிப்பைத் தேர்ந்தெடுப்பது சிக்கலானதா கும். எனவே, இடைநிலை மதிப்பை உள்ளடக்கிய பிரிவை அறிந்தால் இடைச்செருகல் (Interpolation) முறையில் இடை நிலையைக் காணலாம். இவ்வாறு இடைநிலையைக் கணிக்கும் போது, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அலைவெண்கள் ஒரே சீராகப் பரவி யிருப்பதாகக் கருதுகிறோம்.

நாம் ஏற்கெனவே கூறியவாறு, மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப் படுத்திய விவரங்களை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளியே இடைநிலையாதலால், கொடுக்கப்பட்ட மொத்த விவரங்களை (அலைவெண்களை) இரண்டால் வகுத்தால், அப் புள்ளியின் இரு புறத்திலும் எத்தனை மதிப்புகள் அமையவேண்டுமென்ற எண்ணிக்கை தெரியவரும். இப்படிச் செய்யும்போது, இடை நிலை அமைகின்ற பிரிவும் (இடைநிலைப் பிரிவு] தெரிந்துவிடும். இவ்வாறு இடைநிலைப் பிரிவைக் கண்டபிறகு, இடைவைத்தல் முறையில் அடுத்துவரும் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி இடை நிலையைக் கணிக்கலாம்.

$$\text{இடைநிலை} = l + \left[\left(\frac{\frac{N}{2} - m) C}{f}\right]$$

இங்கு

l என்பது இடைநிலை மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லை

m என்பது இடைநிலைப் பிரிவிற்கு முந்திய பிரிவிற்குரிய குவிவு அலைவெண் (பரவலின் அடியிலிருந்து துவங்கினால்).

f என்பது இடைநிலைப் பிரிவிற்குரிய அலைவெண்.

C என்பது பிரிவின் தூரம் (பிரிவு இடைவெளி).

N என்பது மொத்த விவரங்கள் (மொத்த அலைவெண்கள்).

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

வாக்கியம்—நிர்மாணித்தல் சோதனையில் 37 பள்ளிச் சிறுவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இப் பட்டியலிலிருந்து இடைநிலை மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள் X	பள்ளிச் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை *f*	மதிப்பெண்கள் X	பள்ளிச் சிறுவர்கள் *f*
37 – 88	1	25 26	5
35 – 36	2	23 – 24	8
33 – 34	0	21 – 22	8
31 – 32	1	19 – 20	5
29 – 30	0	17 – 18	1
27 – 28	6		

கணிக்கும் முறை

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள பிரிவுகளை மெய்ப்பிரிவுகளாக (உண்மையான பிரிவுகளாக) அமைக்கவும். [பட்டியலில், பத்தி 2]

(2) அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கி தொடர்ந்து வரும் பிரிவுகளுக்கு அலைவுகளை மேலும் மேலும் கூட்டிக் குவிவு அலைவெண்கள் காண்க [பத்தி 4].

(3) அலைவெண்களின் மொத்தத்தை (N) இரண்டால் வகுத்து, $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பு எந்த இரு குவிவு அலைவெண்கள் இடையே அமைந்திருக்கிறது என்பதை அறிந்து இடைநிலைப் பிரிவைக் காணலாம் ($\frac{N}{2}$ முழு எண்ணாகவோ, பின்னமாகவோ இருக்கலாம்). அதாவது, $\frac{37}{2} = 18\cdot5$ ஆனது குவிவு அலைவெண்கள் 14-க்கும், 22-க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது.

(1) மதிப்பெண்கள்	(2) மெய்ப் பிரிவுகள்	(3) பள்ளிச் சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை (அலைவெண்) f_i	(4) குவிவு அலைவெண்கள் (கீழின)
37–38	36·5—38·5	1	38·5–க்குக் கீழ், 37
35–36	34·5—36·5	2	36·5 ,, 36
33–34	32·5—34·5	0	34·5 ,, 34
31–32	30·5—32·5	1	32·5 ,, 34
29–30	28·5—30·5	0	30·5 ,, 33
27–28	26·5—28·5	6	28·5 ,, 33
25–26	24·5—26·5	5	26·5 ,, 27
23–24	22·5—24·5	8	24·5 ,, 22
			,, → 18·5
21–22	20·5—22·5	8	22·5 ,, 14
19–20	18·5—20·5	5	20·5 ,, 6
17–18	16·5—18·5	1	18·5–க்கு கீழ், 1
		37	

22·5–க்கும் 24·5–க்கும் இடையே இடைநிலை அமைந்திருக்கும்.

எனவே, இடைநிலைப் பிரிவு : 22·5—24·5

இங்கு,

$l = 22{\cdot}5$

$m = 14$

$f = 8$

$C = 2$

$\frac{N}{2} = 18.5$

$$\text{இடைநிலை} = 22{\cdot}5 + \left(\frac{18{\cdot}5 - 14}{8}\right) 2$$

$$= 22{\cdot}5 + \frac{4{\cdot}5}{8} \times 2$$

$$= 22{\cdot}5 + \frac{9}{8}$$

$$= 22{\cdot}5 + 1{\cdot}125 = 23.6$$

∴ இடைநிலை மதிப்பெண் = 23·6

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு இடைநிலை காண்க.

பிரிவு	அலைவெண்
20—24	2
25—29	7
30—34	10
35—39	15
40—44	18
45—49	8
50—54	3
54—59	5

பிரிவு	மெய்ப்பிரிவு	அலைவெண் f_i	குவிவு அலைவெண்
20—24	19·5 24·5	2	2
25—29	24·5—29·5	7	9
30—34	29·5—34·5	10	19
35—39	34·5—39·5	...15...	→ (34)
40—44	39 5 -44·5	18	52
45—49	44·5—49·5	8	60
50—54	49·5—54·5	3	63
55—59	54·6—59·5	5	68
		68	

$$\frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34.$$

அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கி தொடர்ந்து வரும் பிரிவுகளுக்கு அலைவுகளை மேலும் மேலும் கூட்டிச் செல்கையில் $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பு (34) குவிவு அலைவெண்ணாக அமைந்தால், (அதாவது $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பு குவிவு அலைவெண்களில் ஏதாவது ஒன்ருக அமைந்தால்) அந்தக் குவிவு அலைவெண்ணுக்குரிய மெய்ப்பிரிவின் மேல் எல்லை இடைநிலை ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட பரவலில் 34-க்குரிய பிரிவு : 34·5—39 5

∴இடைநிலை = 39·5 (34·5—39·5 என்ற பிரிவின் மேல் எல்லை)

இடைநிலையின் சிறப்பியல்பு :

இடை நிலையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி விலக்கங்களின் (Absolute deviations) கூடுதல் மிகச் சிறியதாகும். (தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கே இது பொருந்தும்).

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

பிரிவு	அலைவெண்	மெய்ப்பிரிவு	குவிவு அலைவெண்
5—7	1	4.5—7.5	1
8—10	7	7·5—10·5	8
11—13	9	10·5—13·5	(17)
14—16	0	13·5—16·5	(17)
17—19	6	16·5—19·5	23
20—22	7	19·5—22·5	30
23—25	2	22·5—25·5	32
26—28	2	25·5—28·5	34

$$N = 34\ ;\ \frac{N}{2} = 17.$$

(13·5—16·5) என்ற இப் பிரிவில் இடைநிலை அமைகிறது; இப் பிரிவுகளின் கூட்டுச் சராசரி இடைநிலை ஆகும்.

∴ இடைநிலை = 13·5, 16·5 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{13\cdot5 + 16\cdot5}{2} = \frac{30}{2}$$

$$= \underline{15}$$

அலைவெண் குவிவு வளைகோடு அல்லது ஓகைவ் வரைந்து இடைநிலையைக் கணிக்கும் முறையைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக் காட்டின் மூலம் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்குக் குவிவு அலைவெண் வளை கோடும், ஓகைவ்வும் வரைந்து அவற்றிலிருந்து இடைநிலையைக் காண்க.

சம்பளம் (ரூபாயில்) X	நபர்களின் எண்ணிக்கை f
50–க்குக் கீழ்	0
50 — 60	8
60 — 70	10
70 — 80	16
80 — 90	14
90 — 100	10
100 — 110	5
110 — 120	2
மொத்தம்	65

குவிவு அலைவெண் வளைகோடு வரைய, முதலில் குவிவு அலைவெண் பட்டியல் அமைக்கவேண்டும். பட்டியல் வருமாறு:

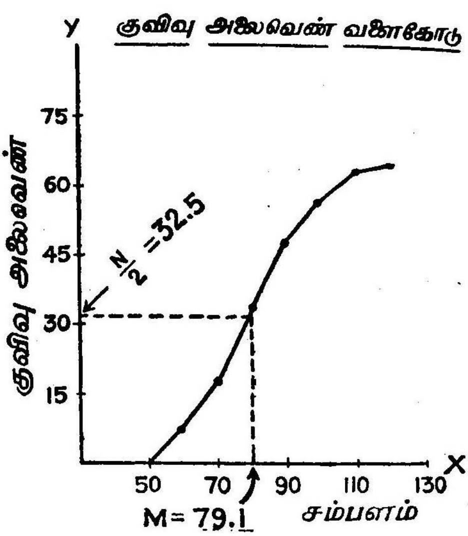
சம்பளம்	குவிவு அலைவெண்
50–க்குக் கீழ்	0
60 ,,	8
70 ,,	18
80 ,,	34
90 ,,	48
100 ,,	58
110 ,,	63
120 ,,	65

கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலில் இடைநிலையானது $\frac{N}{2}$-ஆவது மதிப்பாகும். இதில் N என்பது மொத்த அலைவெண் கள்.

எனவே,

$$\frac{N}{2} = \frac{65}{2} = 32 \cdot 5.$$

பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகளை x அச்சிலும், குவிவு அலைவெண் களை y அச்சிலும் ஏற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு, குவிவு அலைவெண் வளைகோடு வரையவேண்டும். பின்னர் y அச்சில் 32·5ஐ எடுத்துக் கொண்டு படம் 16-ல் கண்டவாறு இடைநிலையைத் தீர்மானிக்க வேண்டும். இடைநிலை $M) = 79 \cdot 1$.

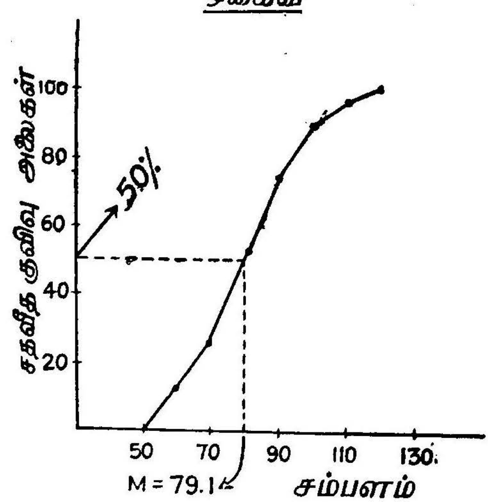


படம் 16.

ஓகைவ் வரைய, முதலில் குவிவு அலைவெண்களை சதவீதங் களாக மாற்றி, அடுத்த பக்கத்தில் கண்டவாறு பட்டியல் அமைக்க வேண்டும்.

சம்பளம்	குவிவு அலைவெண்	சதவீத குவிவு அலைவெண்
50-க்குக் கீழ்	0	0
60 ,,	8	12·3
70 ,,	18	27·7
80 ,,	34	52·3
90 ,,	48	73·8
100 ,,	58	89·2
110 ,,	63	96·9
20 ,,	65	100·0

ஓகைவ்



படம் 17.

x அச்சில் பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகளையும், y அச்சில் சதவீத குவிவு அலைவெண்களையும் உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு ஓகைவ் வரையவேண்டும். பிறகு y அச்சில்

50ஐ எடுத்துக்கொண்டு, படம் 7–ல் கண்டபடி இடைநிலையைக் கணக்கிடவேண்டும். இடைநிலை $(M) = 79 \cdot 1$.

3. முகடு (Mode)

எந்தவொரு விவரத்தின் மதிப்பு மிக அதிகமான தடவை களில் நிகழ்கின்றதோ, அந்த மதிப்பு அவ்விவரங்களின் முக டாகக் கொள்ளப்படுகிறது. தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு முகடு கணக்கிட, அவ்விவரங்களை அலைவுப் பட்டியலாக அமைத்த பிறகு முகடு காணுதல் மேலானது. எடுத்துக் காட்டாக, 10, 8, 6, 0, 4, 0 ஆகியவற்றில் 0-தான் அதிக தடவை (2 தடவை) நிகழ்கின்றது. எனவே, முகடு பூஜ்ய மாகும். ஆனால், இவ் விவரங்களின் சராசரி (முகடு) 0 என்பது பொருளற்றதாகி விடும். ஆகவே இவற்றை அலைவுப் பரவலாக அமைத்து முகடு கணக்கிடுதல் முறையாகும். முகடானது அலைவுப் பரவலோடு இணைந்து விளக்கப்படுகிறது.

அலைவுப் பரவலுக்கு முகடு காணுதல்

அலைவுப் பரவலில் மிகப் பெரிய அலைவெண்ணைக் கொண்ட பிரிவிற்கு முகடு பிரிவு (Modal Class) எனப்படும். முகட்டுப் பிரிவின் நடுமதிப்பைப் 'பண்படாத முகடு' (Crude Mode) எனச் சொல்லப்படுகிறது. நடைமுறையில் கீழே தரப்பட்ட வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி முகடு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\text{முகடு} = l + \frac{C \times f_2}{f_1 + f_2}$$

இங்கு

l — முகட்டுப் பிரிவின் (மெய்ப்பிரிவு) கீழ் எல்லை.

f_1 — முகட்டுப் பிரிவிற்கு உடன் முந்திய பிரிவின் அலை வெண் (அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கினால்).

f_2 — முகட்டுப் பிரிவிற்கு உடன் பிந்திய பிரிவின் அலை வெண்.

C — பிரிவின் தூரம் (பிரிவு இடைவெளி).

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

கீழே தரப்பட்ட பட்டியலிலிருந்து முகடு கணக்கிடுக.

பிரிவு	
42—49	28
35—42	43
28—35	51
21—28	72
14—21	36
7—14	25
0— 7	19

மிகப் பெரிய அலைவெண் (72), 21—28 பிரிவில் அமைந்திருக்கிறது. ஆகவே, முகட்டு வகுப்பு = (21—28) ஆகும். இதில் 21 கீழ் எல்லையாகும்.

இங்கே,

$l = 21$

$f_1 = 36$

$f_2 = 51$

$C = 7$

எனவே,

$$\text{முகடு} = 21 + \frac{51 \times 7}{36 + 51}$$

$$= 21 + \frac{357}{87}$$

$$= 21 + 4.103$$

$$= 25.103.$$

முகட்டைக் கணிக்க வேறொரு வாய்பாடு

$$\text{முகடு} = l + \frac{(f - f_1) \times C}{2f - f_1 - f_2}$$

இதில்

l — முகட்டுப் பிரிவின் (மெய்ப் பிரிவு) கீழ் எல்லை.

f — முகட்டுப் பிரிவின் அலைவெண்.

f_1 — முகட்டுப் பிரிவிற்கு உடன் முந்திய பிரிவின் அலைவெண் (அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கினால்).

f_2 — முகட்டுப் பிரிவிற்கு உடன் பிந்திய பிரிவின் அலைவெண்.

C — பிரிவு இடைவெளி.

முகட்டுக்குக் கிட்டிய மதிப்புக் காண மற்றொரு வாய்பாடு

முற்றிலும் சமச் சீரான பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முடுகு மூன்றும் இணைந்திருக்கும். ஓரளவு சமச் சீருடைய பரவலில் முகடு கண்டு பிடிக்க வாய்பாடு :

முகடு = கூட்டுச் சராசரி — 3 (கூட்டுச் சராசரி—இடை நிலை)

= 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

அலைவுப் பரவலில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் சமமானதாக இருக்குமேயாயின், திட்டவட்டமான முகட்டு வகுப்பு கிடைக்கும்வரை பிரிவின் இடைவெளியை விரிவு படுத்தியும், பிரிவு எல்லைகளை மாற்றி அமைத்தும், தோராயமாக முகடு கணக்கிடலாம்.

4. பெருக்குச் சராசரி (Geometric mean)

அளவுகளுக்குப் பதிலாக வீதமும் விகிதாசாரமும் பயனாகும் சமயங்களில் பெருக்குச் சராசரியும், ஹார்மோனிக் சராசரியும் பயன்படுகின்றன.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு பெருக்குச் சராசரி

$X_1, X_2, \ldots X_N$ ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரி

$$= (X_1, X_2 \ldots X_N)^{\frac{1}{N}}$$

எடுத்துக்காட்டாக, 8, 10, 15, 2 ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரி

$$(8 \times 10 \times 15 \times 2)^{\frac{1}{4}}$$

அலைவுப் பட்டியலுக்குப் பெருக்குச் சராசரி

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N$ என்பன பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகள் என்க.; அவற்றின் முறையே அலைவெண்கள் $f_1, f_2, \ldots\ldots f_N$ என்க. எனில் பெருக்குச் சராசரி

$$\left(\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & & f_N \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots\ldots & X_N \end{matrix} \right)^{\frac{1}{M}}$$

இங்கு $M = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_N$.

மடக்கையை (Logarithm) பயன்படுத்தினல் பெருக்குச் சராசரி காண்பது எளிதாகும்.

5. ஹார்மோனிக் சராசரி (Harmonic mean)

$X_1, X_2 \ldots\ldots X_N$ ஆகிய N விவரங்களின் ஹார்மோனிக் சராசரி

$$H = \frac{N}{\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X_2} + \ldots + \frac{1}{X_N} \right)}$$

2, 4, 8 ஆகிய விவரங்களின் ஹார்மோனிக் சராசரி,

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3 \times 8}{7} = 3{\cdot}43 \text{ ஆகும்.}$$

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_N$ என்பன பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகள் எனவும், $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்பன முறையே அவற்றின் அலைவெண்கள் எனவும் எடுத்துக் கொண்டால், ஹார்மோனிக் சராசரி,

$$= \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_N}{\left(\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \cdots + \frac{f_N}{X_N}\right)}$$

ஆகும்.

6. நிறையிட்ட சராசரி (Weighted average)

$X_1, X_2, \ldots X_N$ என்பன N விவரங்கள் என்க. $W_1, W_2, \ldots W_N$ என்பன முறையே இவற்றின் நிறைகள் என்க. எனில் நிறையிட்ட சராசரி

$$= \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \ldots\ldots + W_N X_N}{W_1 + W_2 + \ldots\ldots W_N.}$$

அலைவுப் பரவலிலிருந்து கிடைக்கின்ற கூட்டுச் சராசரி சில சமயங்களில் நிறையிட்ட சராசரி (Weighted arithemetic Mean) என வழங்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

பாடங்கள்	மதிப்பெண் (சதவீதம்) X	நிறை W	W X
உளவியல்	75	2	150
புள்ளியியல்	60	1	60
கணக்கியல்	59	3	177
தமிழ்	63	1	63
ஆங்கிலம்	55	3	165
மொத்தம்	312	10	615

$$\text{நிறையிட்ட சராசரி} = \frac{615}{10} = 61{\cdot}5 \text{ மதிப்பெண்}$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} = \frac{312}{5} = 62{\cdot}4 \text{ மதிப்பெண்.}$$

ஒரு சிறந்த சராசரியின் சிறப்புப் பண்புகள்

(1) தெளிவான நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட வாய்பாடுடையதாக இருக்கவேண்டும்.

(2) கொடுக்கப்பட்ட எல்லாத் தனி மதிப்புகளையும் சார்ந்ததாக இருக்கவேண்டும்.

(3) எளிதான முறையில் கணக்கிடவும், விரைவாகக் கணக்கிடவும் ஏதுவாக இருக்கவேண்டும்.

(4) பரவல் முழுவதையும் பிரதிபலிக்கும் தன்மை வாய்ந்த சிறந்த பிரதிநிதியாக அமையவேண்டும்.

(5) கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு அதாவது இயற் கணிப்புகளுக்கு எளிதில் பயன்படும் வல்லமை வாய்ந்ததாக இருக்கவேண்டும்.

(6) மாதிரி அமைப்புகளில் நிலையானதாக இருக்கவேண்டும். மாதிரிகளில் ஏற்படும் சிறு சிறு அகமாற்றங்களால் இது பாதிக்கப்படாமலிருக்கவேண்டும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எண்ணற்ற மாதிரிகள் உருவாக்கி, ஒவ்வொரு மாதிரியின் சராசரியும் கணிக்கும்போது இச் சராசரிகளுக்கிடையே அதிக வேறுபாடின்றி நிலையானதாக இருக்கவேண்டும்.

முக்கிய சராசரிகளின் பண்புகளும், குறைபாடுகளும்

கூட்டுச் சராசரி :

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தெளிவான வாய்பாடு உடையது. பரவல் முழுவதையும் பிரதிபலிக்கும் சிறந்த பிரதிநிதியாக உள்ளது. எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட ஒவ்வோர் அளவைகளாலும் பாதிக்கப்படும். அதாவது எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் சார்ந்ததாக இருக்கிறது. எளிதான முறையில் (குறுக்கு வழி) கணக்கிடலாம். இது கணிக்கப்பட்ட சராசரியாதலால், இயற் கணிப்புகளுக்கு எளிதில் பயன்படும். இது நிலையானதாகும். எனவே, கூட்டுச் சராசரி ஒரு சராசரிக்குரிய எல்லாப் பண்புகளையும் திருப்திபடுத்துகின்றது.

மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த தனி அம்சங்கள் (புறக்கோடி மதிப்புகள்) கூட்டுச் சராசரியை மிகவும் பாதிக்கும். இத்தகைய சமயங்கள் இதனை பரவலின் சிறந்த பிரதிநிதியாக எடுத்துக் கொள்ளமுடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி 9; இடைநிலை 9; இவ்விவரங்களில் 14க்குப் பதிலாக 50ஐச் சேர்த்தால் கூட்டுச் சராசரி 14·14 : இடைநிலை 9. எனவே புறக்கோடி மதிப்பு (50) கூட்டுச் சராசரியை மிகவும் பாதிக்கும் என்பது தெளிவாகும். அடுத்ததாக, அலைவுப் பரவலின் முதல் பிரிவு, கடைசி பிரிவுகளின் எல்லைகள் சில சமயங்களில் வரையறுக்கப்படாமலிருப்பின் கூட்டுச் சராசரியினைக் காண இயலாது. இதனைக் கணிக்கும் போது பிரிவின் நடு மதிப்பைப் பயன்படுத்துவதால் முதல், பிரிவின் கீழ் எல்லை, கடைசிப் பிரிவின்மேல் எல்லை தெரியாமல் இருப்பின் இப் பிரிவுகளின் நடுமதிப்பைக் காண இயலாது. எனவே, விவரங்கள் முற்றுப் பெறுத நிலையில் இதனைக் கணிக்க முடியாது.

ஓரளவுக்குச் சமச்சீருடைய பரவலுக்குக் சராசரி தேவைப் படும்போதும், நிலையான சராசரி தேவைப்படும்போதும், மற்ற பண்பளவைகள் (திட்ட விலக்கம், மாற்றுக்கெழு, உடன் தொடர்புக் கெழு போன்றவை) பின்பு கணக்கிடப்படவேண்டிய சமயங்களிலும் மையப்போக்கு அளவைகளில் கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்துவது சிறந்ததாகும்.

இடைநிலை

இதன் மதிப்பு புறக்கோடி மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. இதனை எளிதில் கணக்கிடலாம். அளந்து அறியமுடியாத நிலையில்கூட இதனைக் காணமுடியும். விவரங்கள் முற்றுப் பெறுத நிலையில்கூட இதனைக் கணிக்கமுடியும்.

இடைநிலைக்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணக்கியல் வாய்பாடு கிடையாது. இதனைச் சார்ந்த பிரதிநிதியாக எடுத்துக் கொள்ளமுடியாது. கொடுக்கப்பட்ட எல்லாத் தனி மதிப்புகளையும் சார்ந்ததாக இது இருக்காது. கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு இது பயன்படாது. இதனை நிலையான அளவையாகக் கொள்ளமுடியாது.

ஒரு பரவலின் சரியான நடு மதிப்பு (புள்ளி) தேவைப்படும் போதும், புறக்கோடி மதிப்புகள் சராசரியைப் பாதிக்கும் போதும், இடைநிலையைப் பயன்படுத்துவது சிறந்தது.

முகடு

எளிதில் கணிக்கக்கூடிய இதனை, மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த தனி அம்சங்கள் பாதிக்காது. விவரங்கள் முற்றுப் பெறாத (முதல் பிரிவின் கீழ் எல்லையும், கடைசி பிரிவின் மேல் எல்லையும் கொடுக்கப்படாத) நிலையில்கூட இதனைக் கணிக்க முடியும்.

முகடுக்குத் தெளிவான வரையறுக்கப்பட்ட வாய்பாடு கிடையாது. கொடுக்கப்பட்ட எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் சார்ந்ததாக இல்லாததால் இதனைப் பரவலின் சிறந்த பிரதிநிதியாக எடுக்க முடியாது. கணக்கியல் வழித் துறைகளுக்கு இது பயன்படாது. இதனை நிலையான அளவையாகக் கொள்ள முடியாது. சில சமயங்களில் தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்குக் கணிக்கும் பொழுது இது பொருளற்றதாகி விடும்.

மைய நிலைப் போக்கின் தோராயமான அளவையும், விரைவில் கணிக்கக் கூடிய அளவையும், பரவலின் உண்மையான இனங் காட்டும் அளவையும் தேவைப்படும் போது முகட்டைப் பயன்படுத்துவது சிறந்ததாகும்.

பெருக்குச் சராசரி

இதற்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட வாய்பாடு உண்டு. இயற் கணிப்புகளுக்கு இது பயன்படும். நேர் மதிப்புகளுக்குச் சராசரி கணக்கிடும்பொழுதும், மாற்றவீதம் அல்லது அளவைகளின் விகிதம் ஆகியவற்றிற்குச் சராசரி கணக்கிடும் பொழுதும் இதனைப் பயன்படுத்தலாம். சிறந்த சராசரிக்குரிய பண்புகளில் ஒரு சிலவற்றையே இது திருப்திபடுத்துகிறது.

ஹார்மோனிக் சராசரி

கால வீதங்களின் இவற்றைப் போன்ற மற்ற வீதங்களின் சராசரி கணக்கிடும் நிலையில் இதனைப் பயன்படுத்தலாம். இயற் கணிப்புகளுக்கு இது பயன்படும். பெருக்குச் சராசரிப் போன்று இதுவும், சராசரிக்குரிய ஒரு சில பண்புகளையே திருப்தி படுத்துகிறது.

இதுவரை, ஒவ்வொரு வகை சராசரியும் வெவ்வேறு தருணங்களில் பயன்படும் விதத்தினைக் கண்டோம். கூட்டுச்

சராசரி ஒரு சிறந்த சராசரிக்குரிய எல்லாப் பண்புகளையும் கொண்டிருப்பதால் மையப்போக்கு அளவைகளில் இதுவே சிறந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

பயிற்சி 3.

1. கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்கு, கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(*a*)

மதிப்புகள்	அலைவெண்
70 — 71	2
68 — 69	2
66 — 67	3
64 — 65	4
62 — 63	6
60 — 61	7
58 — 59	5
56 — 57	4
54 — 55	2

(*b*)

மதிப்புகள்	அலைவெண்
100 — 109	5
90 — 99	9
80 — 89	14
70 — 79	19
60 — 69	21
50 — 59	15

(*c*)

மதிப்புகள் :	15	14	13	12	11	10	9	8
அலைவெண் :	1	2	3	6	15	6	2	2

2. மூன்று பிரிவுகளைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் ஒரு சோதனையில் பெற்ற மதிப்புகளின் விவரங்கள் வருமாறு :

	பிரிவு I	பிரிவு II	பிரிவு III
கூட்டுச் சராசரி:	24	31	35
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை:	32	54	16

அந்த வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பைக் காண்க.

3. கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலில் 3ஆவது பிரிவிலுள்ள அலைவெண் தெரியவில்லை. ஆனால் இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 87.5 எனத் தெரிகிறது. தெரியாத அலைவெண்ணைக் காண்க.

மதிப்புகள்	அலைவெண்
120 — 139	50
100 — 119	150
80 — 99	?
60 — 79	250
40 — 59	50

4. அடியிற் கண்ட பரவலுக்குரிய அலைவெண் குவிவு வளை கோடு வரைந்து, வரையிலிருந்து இடைநிலையைக் காண்க.

மதிப்புகள்	அலைவெண்
20 — 21	2
18 — 19	2
16 — 17	4
14 — 15	0
12 — 13	4
10 — 11	0
8 — 9	4

5. மேற்கண்ட பரவலுக்கு ஒகைவ் வரைந்து அதிலிருந்து இடைநிலையைக் காண்க.

6. அடியிற் கண்ட விவரங்களுக்கு பெருக்குச் சராசரியும், ஹார்மோனிக் சராசரியும் கணக்கிடுக.

3, 5, 6, 6, 7, 10, 12

7. கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்கு இடைநிலை, முகடு கணக்கிடுக. இப் பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட இயலுமா?

வயது	நபர்களின் எண்ணிக்கை
25-க்குக் கீழ்	8
25 — 29	12
30 — 34	15
35 — 44	20
45 — 54	9
55 — 64	6
65-க்கு மேல்	5

(8) 'மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்' என்பதின் பொருள் யாது? அவற்றில் முக்கியமானவற்றைக் கூறுக.

(9) கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்புப் பண்புகளைக் கூறி அது எந்தச் சூழ்நிலையில் பயன் மிகுந்து விளங்குகிறது எனக் கூறுக.

(10) பல்வேறு சராசரிகளிடையேயுள்ள தொடர்புகள் யாவை?

(11) முக்கிய சராசரிகளின் பண்புகளையும், குறைபாடு களையும் தருக.

(12) பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி ஆகியவை எந்தச் சூழ்நிலையில் ஏற்ற சராசரிகளாக அமைகின்றன?

(13) ஒரு சிறந்த சராசரிக்குரிய பண்புகளை விளக்கி அப் பண்புகளை பல்வேறு சராசரிகள் எங்ஙனம் திருப்திபடுத்து கின்றன எனக் காண்க.

(15) 'கூட்டுச் சராசரியே தனிச் சராசரிகளில் மிகவும் பயனுள்ளது'—இதனை விளக்குக.

4. சிதறல் அளவைகள் அல்லது மாறுபாடு அளவைகள்

முந்திய அத்தியாயத்தில் மைய நிலைப் போக்கு அளவைகளை விவரித்து, ஒரு தனி மதிப்பைக் கொண்டு புள்ளி விவரங்களின் தன்மையை ஓரளவுக்கு அறியக் கண்டோம். ஆனால், பரவலின் தன்மை முழுவதையும் ஒரு தனி மதிப்பினால் (சராசரியினால்) மட்டும் அறிய இயலாது. சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் முக்கியத் தன்மைகளை வரையறை செய்யவும், கொடுக்கப்பட்ட பரவலை மற்ற பரவல்களோடு நுணுக்கமாக ஒப்பு நோக்கவும் சராசரியைத் தவிர மற்ற அளவைகளும் தேவைப்படுகின்றன. ஒரே சராசரியையுடைய இரு புள்ளி விவரக் குழுக்கள் எல்லா அம்சங்களிலும் ஒத்த தன்மையுடையதாகச் சொல்ல முடியாது. எடுத்துக் காட்டாக, 40, 45, 50, 55, 60 ஆகிய இப் புள்ளி விவரக் குழுவின் கூட்டுச் சராசரி 50 ஆகும். 1, 9, 60, 80, 100 ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரியும் 50 ஆகும். ஒரே சராசரியையுடைய இவ்விரு குழுக்களில் இரண்டாவதாகக் கொடுக்கப்பட்ட குழுவின் விவரங்கள் பரந்து சிதறிக் கிடப்பதும், தனி விவரங்கள் அக் குழுவின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அதிக அளவிற்கு விலக்கமடைந்திருப்பதும் தெளிவாகிறது. தனித்தனி மதிப்புகளுக்கிடையே (அதாவது விவரங்களின் ஒரு மதிப்புக்கும் வேறொரு மதிப்புக்கும்) மாறுபாடுகள் காணலாம். புள்ளி விவரங்கள் இவ்வாறு மாறுபட்டிருப்பதை மாறுபாடு (Variation) அல்லது சிதறல் (Dispersion) எனச் சொல்லப்படுகிறது. மாறுபாடு அல்லது சிதறல் எந்த அளவுக்கு இருக்கிறது என்பதை அளக்கும் அளவைகளை 'மாறுபாடு அளவைகள்' அல்லது சிதறல் அளவைகள்' எனக் கூறுகிறோம்.

சிதறல் அளவைகள் வருமாறு

(1) வீச்சு (Range)

(2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

(3) சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

(4) திட்ட விலக்கமும், மாறுபாடும் (Standard deviation and Variance)

1. வீச்சு

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மதிப்புகளில் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புகளின் தனித்த வேறுபாடே வீச்சாகும். 8, 10, 20, 6, 30, 12 ஆகியவற்றில் மிகப் பெரிய மதிப்பு 30 : மிக சிறிய மதிப்பு 6. இவ் விவரங்களின் வீச்சு = 30−6=24 ஆகும்.

2. கால்மான விலக்கம்

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் சிதறல் தன்மையை சில மதிப்பளவைகளால் (Quartiles) அறியலாம். மொத்த அலகு எண்களைக் குறிப்பிட்ட விகிதங்களில் பிரிக்கும் புள்ளிகளை வரை செய்யும் அளவைகளே மதிப்பாளவைகளாகும். மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கையை நான்கு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் கால்மானம் (Quartiles) எனச் சொல்கிறோம்.

முதல் கால்மானம் (First quartile)

ஏறு வரிசையில் அமைந்த விவரங்களை நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரித்து, 25 சதவீதம் கீழேயும், 75 சதவீதம் மேலேயும் இருக்குமாறு பிரிக்கின்ற புள்ளியை முதல் கால்மானம் எனக் கூறுகிறோம்.

மூன்றும் கால்மானம் (Third Quartile)

மொத்த குறிப்புகளில் கீழே 75 சதவீதமும், மேலே 25 சதவீதமும் அமையுமாறு பிரிக்கின்ற புள்ளியை மூன்றும் கால்மானம் என்கிறோம். அதாவது மொத்த மதிப்புகளில் முக்கால் பாகம் இந்தப் புள்ளிக்கு கீழேயும், கால் பாகம் இதற்கு மேலேயும் இருக்கும்.

இரண்டாம் கால்மானம் அல்லது இடைநிலை (Q_2) என்பது மொத்த விவரங்களை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளியென ஏற்கெனவே கண்டோம். கால்மான விலக்கம் (Quartile deviation) என்பது முதல், மூன்றுவது கால்மானங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தின் பாதியாகும். அதாவது,

கால்மான விலக்கம்,

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

இங்கு

Q என்பது கால்மான விலக்கம்.

Q_1 என்பது முதல் கால்மானம்.

Q_3 என்பது மூன்றும் கால்மானம்.

கால்மான விலக்கத்தைக் காண, முதலில் முதல் கால்மானம், மூன்றும் கால்மானம் கணக்கிடவேண்டுமென்பது தெளிவாகிறது. முதல், மூன்றும் கால்மானங்களைக் கணிக்கும் முறை இடைநிலையைக் கணிக்கும் முறையைப் போலவேயாகும்.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு முதல், மூன்றும் கால்மானங்களைக் காணும் முறை

ஏறும் வரிசையில் அமைந்த குறிப்புகளின் நடு மதிப்பு இடைநிலை (இரண்டாம் கால்மானம்) ஆகும். இவ் வரிசையில் கீழே கால் பாகமும், மேலே முக்கால் பாகமும் இருக்குமாறு பிரிக்கும் புள்ளி (அதாவது மொத்த குறிப்புகள் N எனில், வரிசையில் $\frac{N}{4}$ ஆவது மதிப்பு) முதல் கால்மானம் ஆகும். இந்த வரிசையில் கீழே முக்கால் பாகமும், மேலே கால் பாகமும் இருக்குமாறு பிரிக்கும் புள்ளி, (அதாவது, வரிசையில் $\frac{3N}{4}$ ஆவது மதிப்பு) மூன்றும் கால்மானமாகும்,

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

அடியிற்கண்டவிவரங்களுக்குக் கால்மான விலக்கம் காண்க.

2, 8, 5, 14, 16, 7, 9, 6

முதலில் இவ் விவரங்களை மதிப்பிற்கேற்ப வரிசைப்படுத்த வேண்டும்.

2, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 16

இங்கு N (மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை) = 8 ஆகும்.

முதல் கால்மானம் (Q_1) = வரிசையில், $\frac{N}{4}$ ஆவது மதிப்பு

= வரிசையில், $\frac{8}{4} = 2$ ஆவது மதிப்பு

= 5.

மூன்றும் கால்மானம் (Q_3) = வரிசையில், $\frac{3N}{4}$ ஆவது மதிப்பு

= வரிசையில் $\frac{3 \times 8}{4}$ ஆவதுமதிப்பு

= 6ஆவது மதிப்பு

= 9

$\therefore$ கால்மான விலக்கம் (Q) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{9 - 5}{2}$

$= \frac{4}{2} = 2$

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு (அலைவுப் பரவலுக்கு) கால்மானம் விலக்கம் கணிக்கும் முறை

அலைவுப் பரவலுக்கு இடைநிலையை (Q_2) கணிக்கும் முறையைப் போலவே Q_1ஐயும் Q_3ஐயும் கணிக்கவேண்டும். Q_3ஐக் கணிக்கும்போது அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கி $\frac{N}{2}$ ஆவது மதிப்பு எனக் கண்டோம். ஆனால் Q_1ஐக் கணிக்கும்போது $\frac{N}{4}$ ஆவது மதிப்பையும், Q_3ஐக் கணிக்கும் போது $\frac{3}{4}N$ ஆவது மதிப்பையும் காணவேண்டும். Q_1ஐக் கணக்கிட வாய்பாடு வருமாறு :

$$Q_1 = l + \left(\frac{\frac{N}{4} - m}{f}\right) \times C$$

இங்கு

l என்பது முதல் கால்மானம் அடங்கும் மெய்ப்பிரிவின் (முதல் கால்மான மெய்ப்பிரிவின்) கீழ் எல்லை.

m என்பது முதல் கால்மான மெய்ப்பிரிவிற்கு முந்திய பிரிவின் (அளவுத் திட்டத்தின் அடியிலிருந்து துவங்கினுல்) குவிவு அலைவெண்.

f என்பது முதல் கால்மான மெய்ப்பிரிவின் அலைவெண்.

C என்பது பிரிவு இடைவெளி.

N என்பது மொத்த அலைவெண்கள்.

Q_3ஐக் கணிக்க வாய்பாடு :

$$Q_3 = l + \left(\frac{\frac{3N}{4} - m}{f}\right) \times C$$

இங்கு

l என்பது மூன்ரும் கால்மான மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லை.

m என்பது மூன்ரும் கால்மான பிரிவிற்கு முந்திய பிரிவின் குவிவு அலைவெண்.

f என்பது மூன்ரும் கால்மானப் பிரிவின் அலைவெண்.

N என்பது மொத்த அலைவெண்கள்.

C என்பது பிரிவு இடைவெளி.

எனவே, அலைவுப் பரவலுக்குரிய கால்மான விலக்கம்

$$(Q) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

விமானப்படைத் தேர்வுக்காக நடத்தப்பட்ட சோதனையில் 100 மாணவர்களின் அறிவுத் திறன் ஈவு (*I. Q*) அடியிற்கண்ட பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. கால்மான விலக்கம் கணக்கிடுக.

I. Q	140—149	130—139	120—129	110—119	100—109	90—99
மாணவர்கள்	11	16	23	20	16	14

I. Q மெய்ப்பிரிவு	மாணவர்கள் f	குவிவு அலைவெண்
139·5 — 149·5	11	100
129·5 — 139·5	16	89
		→ Q_3
119·5 — 129·5	23	73
109·5 — 119·5	20	50
99·5 — 109·5	16	30
		→ Q_1
89·5 — 99·5	14	14
மொத்தம்	100 N	

$$\frac{N}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 100}{4} = 75$$

முதல் கால்மான மெய்ப்பிரிவு : 99·5 — 109·5

இதில்

$$l = 99{\cdot}5$$

இப்பிரிவிற்கு முந்திய பிரிவின் குவிவு அலைவெண்

$m = 14$

$f = 16$

$C = 10$

$$\therefore Q_1 = 99{\cdot}5 + \left(\frac{25 - 14}{16}\right) \times 10$$

$$= 99{\cdot}5 + \frac{11}{16} + 10$$

$$= 99{\cdot}5 + 6{\cdot}9 = 106{\cdot}4$$

மூன்றும் கால்மான மெய்ப் பிரிவு : 129.5 -- 139.5

$l = 129.5$

$m = 73$

$f = 16$

$C = 10$

$$Q_3 = 129.5 + \left(\frac{75 - 73}{16}\right) \times 10$$

$$= 129.5 + \frac{2}{16} \times 10$$

$$= 129.5 + 1{\cdot}25$$

$$= 130.75$$

$$\therefore \text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{130{\cdot}75 - 106.4}{2}$$

$$= \frac{24{\cdot}35}{2}$$

$$= 12{\cdot}175.$$

Q_1, Q_3 பரவலின் மையத்திலுள்ள 50சதவீத மதிப்புகளுக்கு எல்லைகளாக அமைகின்றன. இந்த இரு புள்ளிகளின் தூரத்தை ($Q_3 - Q_1$) இடைக் கால்மான வீச்சு (Inter quartile range) எனவும், கால்மான விலக்கத்தை அரை இடைக் கால்மான வீச்சு (Semi Inter quartile range) எனவும் கூறுவர்.

முற்றிலும் சமச் சீரான பரவலில், Q_1-ம், Q_3-ம் இடைநிலையிலிருந்து (Q_2-விருந்து) சம தூரத்தில் அமையும். சமச் சீரிலாப் பரவலில், இவ்விரு தூரங்களும் சமமாக இருக்காது. முற்றிலும் சமச் சீரான பரவலில் : $Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

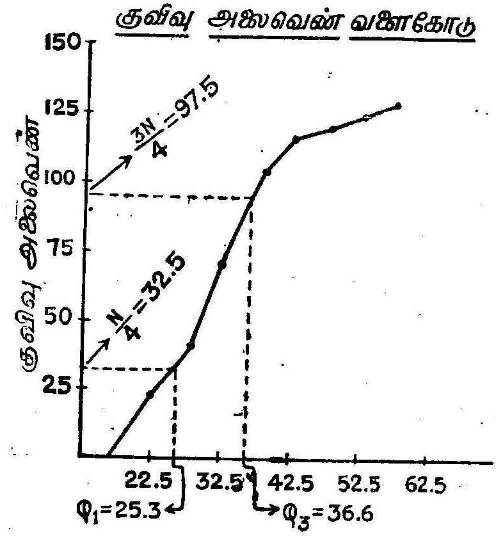
கீழே தரப்பட்ட பரவலுக்குக் குவிவு அலைவெண் வளைகோடு வரைந்து அவ் வரையிலிருந்து கால்மான விலக்கத்தினைக் காண்க.

மாத வருமானம் (ரூபாயில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
17.5 — 22.5	22
22.5 — 27.5	19
27.5 — 32.5	30
32.5 — 37.5	32
37.5 — 42.5	14
42.5 — 47.5	3
47.5 — 52.5	4
52.5 — 57.5	6
	130

குவிவு அலைவெண் வளைகோடு வரைய முதலில் பட்டியலைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைப்போம்.

	குவிவு அலைவெண்
22.5–க்குக் கீழ்	22
27.5 ,,	41
32.5 ,,	71
37.5 ,,	103

	குவிவு அலைவெண்
42.5க்குக் கீழ்	117
47.5 ,,	120
52.5 ,,	124
57.5 ,,	130



படம் 18.

x அச்சில் பிரிவின் மேல் எல்லைகளையும், *y* அச்சில் குவிவு அலைவெண்களையும் உற்ற படஅளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு, குவிவு அலைவெண் வளைகோடு வரைய வேண்டும். பின்னர் முதல் கால்மானம் காண, *y* அச்சில், $\frac{N}{4}\left(=\frac{130}{4}\right)$ஐ, அதாவது 32.5ஐ எடுத்துக் கொண்டு படம் 18-ல் கண்டவாறு Q_1ஐத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

இதே போல், $\frac{3N}{4}$ $(= 97.5)$ஐ *y* அச்சில் எடுத்துக் கொண்டு படம் 8ல் கண்டவாறு Q_3ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

எனவே, படத்திலிருந்து

$$Q_1 = 25.3$$

$$Q_3 = 36.6$$

$$\therefore \text{ கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{36.6 - 25.3}{2}$$

$$= 5.65$$

3. சராசரி விலக்கம் (Average deviation)

ஏதாவது ஒரு சராசரியிலிருந்து தனி மதிப்புகள் பெறுகின்ற வெறும் விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியைச் சராசரி விலக்கம் என்கிறோம். அதாவது, சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களை, (இயற் கணிப்புக் குறிகளைக் கணக்கில் எடுக்காமல்) கூட்டி, இக் கூடுதலை விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்க, சராசரி விலக்கம் கிடைக்கும். பொதுவாக, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தோ, இடை நிலையிலிருந்தோ விலக்கங்கள் எடுக்கப்படும். எனினும் இடைநிலையிலிருந்து பெறுகின்ற சராசரி விலக்கம் மிகவும் குறைவாக இருக்குமாதலால் (அலைவுப் பரவலுக்குப் பொருந்தாது) இடைநிலையினின்று விலக்கங்களை அளப்பது மேலானது. சராசரி விலக்கத்தைக் கீழ்வரும் வாய்பாட்டால் எழுதலாம்.

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{|X_1 - A| + |X_2 - A| + \ldots + |X_N - A|}{N}$$

$$= \frac{\sum |X_i - A|}{N} \quad \text{(தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு)}$$

இதில்,

X_1, X_2 ... X_N என்பன கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள்.

A என்பது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் சராசரி.

N என்பது மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை

| | என்பது இயற்குறிகளைக் கணக்கிலெடுக்கக் கூடாது என்பதனைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

2, 4, 6, 8, 10 ஆகியவற்றின் சராசரி விலக்கம் யாது?

விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி = 6

(இவ்விவரங்களின் இடை நிலையும் = 6.)

விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $(N) = 5$

∴ சராசரி விலக்கம் =

$$\frac{|2-6|+|4-6|+|6-6|+|8-6|+|10-6|}{5}$$

$$= \frac{4+2+0+2+4}{5}$$

(இயற் கணிப்புக் குறிகளைக் கணக்கிலெடுக்காமல்)

$$= \frac{12}{5} = 2.4$$

அலைவுப் பரவலுக்குச் சராசரி விலக்கம்

$X_1, X_2, \ldots X_K$ என்பன K பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகள் எனவும், f_1, f_2, f_K என்பது அவற்றின் முறையே அலைவெண்கள் எனவும், A என்பது பரவலின் ஏதாவது ஒரு சராசரி எனவும், N என்பது மொத்த அலைவெண்கள் எனவும் கொண்டால்,

சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{f_1|X_1-A| + f_2|X_2-A| + \ldots f_K|X_K-A|}{f_1+f_2+\ldots+f_K}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i|X_i-A|}{N}$$

இங்கு $N = \sum_{1}^{K} f_i$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

பிரிவுகள்	அலைவெண்
12 — 14	1
10 — 12	2
8 — 10	3
6 — 8	3
4 — 6	1
மொத்தம்	10

இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி = 8·8

இடைநிலை = 8·67.

பிரிவின் நடு மதிப்பு X_i	அலைவெண் f_i	$X_i - \overline{X}$ $(X_i - 8{\cdot}8)$	$f_i \mid X_i - \overline{X} \mid$	X_i — இடைநிலை $X_i - 8\ 67$	$f_i \mid X_i - M_e \mid$
13	1	13−8·8 =4·2	1×4·2=4·2	13−8·67 =4·33	1×4·33 =4·33
11	2	2·2	4·4	2·33	4·66
9	3	·2	·6	·33	·99
7	3	−1·8	5·4	−1·67	5·01
5	1	−3·8	3·8	−3·67	3·67
மொத்தம்	10 N	......	18·4 $\Sigma f_i \mid X_i - \overline{X} \mid$	......	18·66 $\Sigma f_i \mid X_i - M_e \mid$

சராசரி விலக்கம் (கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து) $= \frac{18 \cdot 4}{10} = 1 \cdot 84$

சராசரி விலக்கம் (இடைநிலையிலிருந்து) $= \frac{18 \cdot 66}{10} = 1.87.$

சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்பு

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்குச் சராசரி விலக்கம் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடும்போது மிகச் சிறியதாக இருக்கும்.

4. திட்ட விலக்கம்

மாறுபாடு அளவைகளில் முக்கியமானதும், நடைமுறையில் அடிக்கடி பயன்படுத்துவதும், திட்ட விலக்கமேயாகும். கூட்டுச் சராசரியினின்று தனித்த குறிப்புகள் அடைகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைச் கண்டால் அது மாறுபாடு (Variance) எனவும், அந்த மாறுபாட்டிற்கு வர்க்க மூலத்தைக் கண்டால் அது திட்ட விலக்கம் (Standard deviation) எனவும் சொல்லப்படுகிறது. சராசரி விலக்கம் கணிக்கும்போது இயற்குறிகளைக் கணக்கில் எடுக்காமல் விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டோம். இவ்வாறு, (இயற்கணிதத்தின்படி) இயற்குறிகளைப் புறக்கணிப்பது குற்றமுடைய முறையாகும். இந்தக் குறைபாட்டை நிவர்த்தி செய்ய திட்ட விலக்கம் கணிக்கும்போது விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் காணும் முறை

$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_N$ என்பன X மாறியின் N மதிப்புகள் எனவும், இம் மதிப்புக்களின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{X}$ எனவும் கொண்டால், $\overline{X}$-லிருந்து தனித்த குறிப்புகள் பெறுகின்ற விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள்

$(X_1 - \overline{X})^2, (X_2 - \overline{X}^2), \ldots\ldots (X_N - \overline{X})^2$ ஆகும்.

இவ்வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியை, அதாவது

$$\frac{(X_1 - \overline{X}^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N} \text{ ஐ}$$

மாறுபாடு எனக் கூறுவர்.

ஆகவே, மாறுபாடு $(S^2) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}$.

இதனை எளிதில் கணக்கிட அடியிற் கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \overline{X}^2$$

இதற்கு (S^2–க்கு) வர்க்க மூலத்தைக் கண்டால் அதுவே திட்ட விலக்கமாகும். எனவே,

$$\text{திட்ட விலக்கம் } (S) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \overline{X}^2}$$

[குறிப்பு : முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை σ (சிக்மா) என்ற அடையாளத்தாலும், மாதிரியின் திட்ட விலக்கத்தை S என்ற எழுத்தாலும் குறிப்பது மரபாகும்.]

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழே தரப்பட்ட விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

6, 8, 10, 12, 14

இவ்விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி 10. 10–லிருந்து தனித்த குறிப்புகள் பெறுகின்ற விலக்கங்கள், (6—10), (8—10), (10—10), (12—10), (14—10) ஆகும்.

அதாவது, —4, —2, 0, 2, 4 இவற்றின் வர்க்கங்கள்,

16, 4, 0, 4, 16 ஆகும்

)வ் வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{16+4+0+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8 \text{ ஆகும்.}$$

னவே, மாறுபாடு $(S^2) = 8$

ிட்ட விலக்கம் $(S) = \sqrt{8} = 2{\cdot}83$.

தாகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடும் முறை

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை ுதிகமாக இருக்கும்போது, குறிப்புகளை அலைவுப் பரவலாகத் தாகுத்துத் திட்ட விலக்கத்தினைக் கணிப்பது இலகுவாகும். $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ என்பன K பிரிவுகளின் நடு மதிப்புகள் என்க; $f_1, f_2, \ldots\ldots f_k$ என்பன முறையே அவற்றின் அலைவெண்கள் ன்க; $\overline{X}$ என்பது இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி என்க; என்பது விவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை என்க; எனில்

ாறுபாடு $= \dfrac{f_1(X_1 - \overline{X})^2 + f_2(X_2 - \overline{X})^2 \ldots f_k(X_k - \overline{X})^2}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_k}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i (X_i - \overline{X})^2}{N}$$

இதில் $N = \sum_{i=1}^{K} f_i$

ிட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{K} f_i (X_i - \overline{X})^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K} f_i X_i^2}{N} - \overline{X}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K} f_i X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{K} f_i X_i}{N}\right)^2}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

இசைத் திறமை சோதனையில் 10 பெண்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

திட்ட விலக்கம் காண்க.

மதிப்பெண்	பெண்களின் எண்ணிக்கை f_i
16 — 18	2
14 — 16	1
12 — 14	3
10 — 12	4
மொத்தம்	10

கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் பிரிவுகளுக்குப் பிரிவின் நடு மதிப்புகளைக் காணவேண்டும் (பட்டியலில் பத்தி 2).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
பிரிவுகள்	பிரிவின் நடு மதிப்பு X_i	அலைவெண் f_i	$f_i X_i$	X_i^2	$f_i X_i^2$
16—18	17	2	$2\times17=34$	17×17	$2\times289=578$
14—16	15	1	15	225	225
12—14	13	3	39	169	507
10—12	11	4	44	121	484
மொத்தம்	......	10 N	132 $\Sigma f_i X_i$		1794 $\Sigma f_i X_i^2$

$$\text{மாறுபாடு} = \frac{1794}{10} - \left(\frac{132}{10}\right)^2$$

$$= 179.4 - 174.24$$

$$= \underline{5.16} \text{ மதிப்பெண்}$$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{5.16} = 2.27 \text{ மதிப்பெண்}$$

திட்ட விலக்கம் கணிக்கக் குறுக்கு வழி

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும் போதும், பிரிவு நடு மதிப்புகள் பெரிய எண்களாக இருக்கும் போதும் திட்ட விலகத்தைக் கணிக்கும் போதும், கூட்டுச் சராசரியைக் குறுக்கு வழியில் கணக்கிடுவதைப் போல, ஏதேனும் ஓர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து அளப்பது கணிப்பினை எளிதாக்கும். இதனைக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாட்டினுல் கணிக்கலாம்.

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{\left[\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2\right] \times C^2}$$

இங்கே

f_i என்பது பிரிவு அலைவெண்

$d_i \left(= \dfrac{X_i - A}{C}\right)$ என்பது அந்தப் பிரிவின் நடுமதிப்பு (X_i) எதேச்சை மூலத்திலிருந்து (A–விருந்து) பெறும் விலக்கம் (பிரிவு) இடைவெளி அலகுகளில்.

C என்பது பிரிவு இடைவெளி.

N என்பது மொத்த அலைவெண்கள்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

அடியிற் கண்ட பட்டியலிலிருந்து திட்ட விலக்கத்தினைக் கணிக்கவும்.

பிரிவுகள்	அலைவெண்
55 — 59	1
50 — 54	1
45 — 49	3
40 — 44	4
35 — 39	6
30 — 34	7
25 — 29	12
20 — 24	6
15 — 19	8
10 -- 14	2

கணிக்கும் முறை

கீழே தரப்பட்ட பட்டியலை அமைக்க,

(1) பிரிவின் நடு மதிப்புகளை (பத்தி 3) எழுதவும்.

(2) அலைவுப் பட்டியலில் மையத்திற்கு அருகே (பெரிய அலைவெண்ணுக்குரிய பிரிவின் நடு மதிப்பை) ஒரு பிரிவின் நடு மதிப்பை எதேச்சை மூலமாகத் தேர்ந்தெடுக்கவும். எதேச்சை மூலம் = 32.

(3) ஒவ்வொரு பிரிவின் நடு மதிப்பு, எதேச்சை மூலத்திலிருந்து பெறுகின்ற விலக்கங்களைப் பிரிவு இடைவெளியால் (5ஆல்) வகுத்து எழுதவும் (பத்தி 4).

(4) இந்த விலக்கங்களை அவற்றிற்குரிய அலைவெண்களால் பெருக்கவும் (பத்தி 5).

(5) இந்த விலக்கங்களை வர்க்கங்களாக்கி, அந்த வர்க்கங்களை அதற்குரிய அலைவெண்களால் பெருக்கவும் (பத்தி 6).

(1) பிரிவுகள்	(2) அலைவெண் f_i	(3) பிரிவின் நடு மதிப்பு X_i	(4) விலக்கம் (d_i) $d_i=\frac{X_i-32}{5}$	(5) $f_i d_i$	(6) $f_i d_i^2$
55 — 59	1	57	$\frac{57-32}{5}=5$	$1\times5=5$	$1\times25=25$
50 — 54	1	52	4	4	16
45 — 49	3	47	3	9	27
40 — 44	4	42	2	8	16
35 — 39	6	37	1	6	6
30 — 34	7	32	0	0	0
25 — 29	12	27	− 1	−12	12
20 — 24	6	22	− 2	−12	24
15 — 19	8	17	− 3	−24	72
10 — 14	2	12	− 4	− 8	32
மொத்தம்	50 N	...	...	−24 $\Sigma f_i d_i$	230 $\Sigma f_i d_i^2$

$C = 5$

$$\therefore \text{மாறுபாடு} = \left\{\frac{230}{50} - \left(\frac{-24}{50}\right)^2\right\} \times 5^2$$

$$= \{4.6 - (.48)^2\} \times 5^2$$

$$= \{4.6 - .2304\} \times 5^2$$

$$= \{4.3696 \times 5^2$$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} = \sqrt{4.3696 \times 5^2}$$

$$= \sqrt{4.3696} \times 5$$

$$= 2.09 \times 5 = 10.45$$

வர்க்க மூல வர்க்கச் சராசரி விலக்கம்

விவரங்களை கூட்டுச் சராசரியல்லாத பிறிதோர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கங்கள் கண்டு, இவற்றை வர்க்கப் படுத்திக் கூட்டி, மொத்த அலைவெண்ணால் வகுத்து வர்க்க மூலம் கண்டால், அதனை வர்க்க மூல வர்க்கச் சராசரி விலக்கம் (Root mean square deviation) எனக் கூறுகிறோம். எனவே,

$$\left.\begin{array}{c}\text{வர்க்க மூல வர்க்கச் சராசரி}\\ \text{விலக்கம்}\end{array}\right\} = \sqrt{\frac{\sum f_i\,(X_i - A)^2}{N}}$$

இங்கு A என்பது எதேச்சை மூலம்.

மேற்கண்ட வாய்பாட்டில் A என்பது கூட்டுச் சராசரி யானால், அதாவது,

$$\sqrt{\frac{\sum f_i\,X_i - \bar{X})^2}{N}} \text{ எனில்,}$$

இதுவே திட்ட விலக்கமாகும்.

திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள்

(1) திட்ட விலக்கம் மற்றைய வர்க்க மூல வர்க்கச் சராசரி விலக்கங்களை விடச் சிறியது. அதாவது,

$$\sqrt{\frac{\sum f_i\,(X_i - \bar{X})^2}{N}} < \sqrt{\frac{\sum f_i\,(X_i - A)^2}{N}}$$

(2) திட்ட விலக்கம் சராசரி விலக்கத்தைவிடப் பெரியது. அதாவது, திட்ட விலக்கம் > சராசரி விலக்கம்.

(3) சமச் சீரான அல்லது ஓரளவுக்குச் சமச் சீரான பரவலில்,

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{4}{5}\text{ திட்ட விலக்கம்.}$$

$$\text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{2}{3}\text{ திட்ட விலக்கம்.}$$

(4) பல்வேறு குழுக்கள் (பரவல்கள்) இணைந்த குழுவின் (பரவலின்) திட்ட விலக்கம்.

N_1 விவரங்கள் அடங்கிய ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{X}_1$; திட்ட விலக்கம் S_1 என்க.

N_2 விவரங்கள் அடங்கிய மற்றொரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{X}_2$; திட்ட விலக்கம் S_2 என்க. எனில் அவ்விரண்டு குழுக்களும் இணைந்த $(N_1 + N_2)$ விவரங்கள் அடங்கிய குழுவின் (S) திட்ட விலக்கம் வருமாறு :

$$S^{*}(\text{இணைந்த}) = \sqrt{\frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2 + N_1 d_1^2 + N_2 d_2^2}{N_1 + N_2}}$$

இங்கு

$$d_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}$$

$$d_2 = \bar{X}_2 - \bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2}{N_1 + N_2} \text{ (இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி)}$$

இதனை இரண்டிற்கு மேற்பட்ட (K) குழுக்களுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.

S (இணைந்த)

$$= \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2 + \ldots + N_K S_K^2 + N_1 d_1^2 + N_2 d_2^2 + N_K d_K^2}{N_1 + N_2 + \ldots + N_K}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

இரண்டு குழுக்கள் சாதனைச் சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரிகளும், திட்ட விலக்கங்களும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவ்விரண்டு குழுக்களும் இணைந்த குழுவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

	அம்சங்கள் (N)	கூட்டுச் சராசரி $(\bar{X})$	திட்ட விலக்கம் (S)
குழு A	25	80	15
குழு B	75	70	25

இங்கு,

$N_1 = 25 \qquad \bar{X}_1 = 80 \qquad S_1 = 15$

$N^2 = 75 \qquad \bar{X}_2 = 70 \qquad S_2 = 25$

இணைந்த கூட்டுச் சராசரி $\overline{(X)} = \dfrac{25 \times 80 + 75 \times 70}{25 + 75}$

$$= \frac{7250}{100}$$

$$= 72.50$$

$$d_1 = 80 - 72.50 = 7.50$$

$$d_1^2 = 56.25$$

$$d_2 = 70 - 72.5 = -2.50$$

$$d_2^2 = 6.25$$

$\therefore$ S (இணைந்த)

$$= \sqrt{\frac{(25 \times 15) + (75 \times 25) + (25 \times 56.25) + (75 \times 6.25)}{25 + 75}}$$

$$= 23.32$$

கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு நிலையெண்ணைக் (Constant) கூட்டினால், அப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் பாதிக்கபடாது. ஆனால், அப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி பாதிக்கப்படும். எடுத்துக் காட்டாக, 1, 4, 7, 10, 13 ஆகிய மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி 7 ஆகும். இம் மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் 4.24 ஆகும். இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு களின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் 10ஐக் கூட்டினால், 11, 14, 17, 20, 23 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். இவற்றின் திட்ட விலக்கம் 4.24 ஆக இருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆனால், இவற் றின் கூட்டுச் சராசரி 17 ஆகும். அதாவது, எந்த நிலை யெண்ணை மதிப்புகளுக்குக் கூட்டுகிறோமோ, அந்த எண்ணைக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரிக்குக் கூட்ட வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஒரு நிலையெண்ணால் பெருக்கினால், கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகிய இரண்டும் பாதிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பரவலின் முறையே 3, 20 என்க; அப் பரவலின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 5ஆல் பெருக் கினால் திட்ட விலக்கம் 15 (=3 × 5) ஆகவும், கூட்டுச் சராசரி 100 (=20 × 5) ஆகவும் இருக்கக் காண்கிறோம்.

திட்ட மதிப்பு (Standard score) :

தனித்த குறிப்பு ஒன்று கூட்டுச் சராசரியினின்று விலக்கம் கண்டு, அவ்விலக்கத்தைத் திட்ட விலக்கத்திஞல் வகுத்துப் பெறுகின்ற மதிப்பைத் திட்ட மதிப்பு என்கிறோம். அதாவது, ஒரு பரவலின்கூட்டுச் சராசரி திட்ட விலக்கம் முறையே $\overline{X}$, S எனில், X என்ற ஒரு மதிப்பின்

$$\text{திட்ட மதிப்பு} = \frac{X - \overline{X}}{S} \text{ ஆகும்.}$$

தொகுப்பதஞல் திட்ட விலக்கத்திற்கு ஏற்படும் பிழைகளுக்குத் திருத்தம் — ஷெப்பர்டின் திருத்தம் :

ஓர் அலைவுப் பரவலிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியை, திட்ட விலக்கத்தை அல்லது சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடும் போது பிரிவுகளில் அடங்கியுள்ள விவரங்களின் மதிப்பு தெரியாததால், அவ் விவரங்கள் அடங்கியுள்ள பிரிவின் நடு மதிப்பை ஒவ்வொரு விவரத்தின் மதிப்பாக எடுத்துக்கொள்கிறோம். இவ்வாறு செய்யும் போது, குறிப்புகள் யாவும் சீராகப் பரவியிருப்பதாகவும், பிரிவின் நடு மதிப்பு அப் பிரிவில் அடங்கியுள்ள விவரங்களின் பிரதிநிதியாக அமையும் எனவும் புனைந்து கொள்கிறோம். பிரிவின் நடு மதிப்புப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரியைவிடப் பெரியதாக இருக்கும் போது ஏற்படும் நேர் பிழைகள், பிரிவின் நடு மதிப்புப் பிரிவின் கூட்டுச் சராசரியை விடச் சிறியதாக இருக்கும் போது ஏற்படும் எதிர்ப்பிழைகளால் சரி செய்யப்படுவதால், கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடும்போது அவ்வாறு புனைந்து கொள்வதிஞல் பிழைகள் ஏற்படாது. ஆனல், திட்ட விலக்கத்தையும், சராசரி விலக்கத்தையும், இவ்வாறு புனைந்து கொள்வது பாதிக்கக்கூடும்.

திட்ட விலக்கத்திலும், மாறுபாட்டிலும் (variance) விலக்கங்களை வர்க்கமாக்கும் போதும், சராசரி விலக்கத்திஞல் வெறும் விலக்கத்தைப் பயன்படுத்தும் போதும், பிழைகள் ஒழுங்கு முறையாக இருக்கும். எனவே, அலைவுப் பரவலிலிருந்து திட்ட விலக்கம் கணிக்கும் போது ஏற்படும் பிழையைச் சரிசெய்ய W. F. ஷெப்பர்ட் (W. F. Sheppard) என்பவரால் திட்ட விலக்கத்திற்கு ஒரு திருத்தம் கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. இத் திருத்தத்திற்கு 'ஷெப்பர்ட் திருத்தம்' (Sheppard's Correction) எனப் பெயராகும்.

S^2 என்பது பிழை திருத்தப்படாத மாறுபாடு எனவும், C என்பது பரவலின் பிரிவு இடைவெளி எனவும் கொண்டால், திருத்தப்பட்ட மாறுபாடு,

$$S_c^2 = S^2 - \frac{C^2}{12} \text{ ஆகும்.}$$

திருத்தப்பட்ட திட்ட விலக்கம்,

$$S_c = \sqrt{S^2 - \frac{C^2}{12}} \text{ ஆகும்.}$$

மொத்த அலைவெண்கள் அதிகமாக (500-க்கு மேல்) இருக்கும் போதும், அலைவுப் பரவலின் பிரிவுகள் 12-க்குக் குறைவாக இருக்கும் போதும், பிரிவு இடைவெளி தூரம் அதிகமாக (15-க்கு மேல்) இருக்கும் போதும், இந்தப் பிழைத் திருத்தத்தினை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

மாறுபாடு அளவைகளின் சிறப்புப் பண்புகள்

(அ) வீச்சு :

வீச்சை எளிதில் கணக்கிடலாம்; எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். இதனைக் கொண்டு மாறுபாட்டினைத் தோராயமாக அளக்கலாம். ஆனால் இது மிகவும் நிலையற்றதோர் அளவையாகும். பரவலின் தன்மையைப் பற்றி (மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய குறிப்புகளுக்கிடையே அமையும் விவரங்களைப் பற்றி) எந்தவொரு செய்தியையும் தராது. கொடுக்கப்பட்ட எல்லா விவரங்களையும் சார்ந்ததாக இருக்காது. கணக்கியல் ஆய்வுகளுக்கும் இது பயன்படாது.

விவரங்கள் அதிக அளவில் சிதறி இருக்கின்ற போதும், இரு முனை கோடி குறிப்புகளைப் பற்றி அறிய விரும்பும் போதும், மாறுபாட்டினை விரைவாக அளக்க ஓர் அளவை தேவைப்படும் போதும் வீச்சைப் பயன்படுத்தலாம்.

(ஆ) கால்மான விலக்கம் :

கால்மான விலக்கத்தை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம்; விவரங்கள் முற்றுப் பெறாத நிலையில்கூட இதனைக் கணிக்க முடியும். கால்மான விலக்கத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணக்கியல் சூத்திரம் கிடையாது. ஆகவே, கணக்கியல் ஆராய்ச்சி வழி முறைகளுக்கு இது பயன்படாது. இதனை நிலையான ஓர்

அளவையாக ஏற்றுக்கொள்ள முடியாது. கொடுக்கப்பட்ட எல்லா விவரங்களேயும் சார்ந்ததாக இது அமையாது.

திட்ட விலக்கத்தைப் பாதிக்கக் கூடிய புறக்கோடி மதிப்புகள் பரவலில் இருக்கின்ற போதும், மைய நிலைப் போக்கு அளவைகளில் இடை நிலையைப் பயன்படுத்தும் சந்தர்ப்பங்களிலும், பரவலின் இரு கால்மான விலக்கங்களுக்கிடையே அமையும் 50 சதவீத குறிப்புகளைப் பற்றி அறிவதே நமது நோக்கமாக இருக்கும்போதும் கால்மான விலக்கத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

(இ) சராசரி விலக்கம் :

சராசரி விலக்கம் பரவலின் ஒவ்வொரு மதிப்பினுலும் பாதிக்கப்படுகிறது. பரவலின் தனித்த குறிப்புகளுக்கும், சராசரிக்குமுள்ள சராசரி வேறுபாட்டினை எடுத்துக்காட்டும். புறக்கோடி விலக்கங்களால், திட்ட விலக்கத்தைவிட இது குறைந்த அளவிலேயே பாதிக்கப்படும். ஓரளவுக்கு இதனை நிலையானதோர் அளவையாகக் கொள்ளலாம். சராசரி விலக்கத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணக்கியல் சூத்திரம் கிடையாது. இயற் கணிப்புக் குறைகளைப் புறக் கணிப்பது இயற் கணிதத்தின்படி தவருன முறையாகும்.

திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிட இயலாத சந்தர்ப்பங்களிலும், (திட்ட விலக்கத்தை எளிதில், விரைவாகக் கணக்கிட முடிவதால்) ஓரளவுக்கு நம்பகமான மாறுபாடு அளவை ஒன்று தேவைப்படுகின்ற நிலையிலும், சராசரி விலக்கத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

(ஈ) திட்ட விலக்கம் :

பரவலின் ஒவ்வொரு மதிப்பும் திட்ட விலக்கத்தைப் பாதிக்கிறது. இதற்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணக்கியல் வாய்ப்பாடு உண்டு. ஆகவே, கணக்கியல் ஆராய்ச்சி வழி முறைகளுக்கு இது பயன்படுகிறது. இதுநிலையான ஒரு மாறுபாடு அளவையாகும். மாதிரி முறைகளிலும், புள்ளி விவர உய்த்துணர்வுகளிலும் இது பயன்படுகிறது.

நிலையான, நம்பகமான, திருத்தமான மாறுபாடு அளவை ஒன்று தேவைப்படுகின்றபொழுதும், திட்ட விலக்கத்தினைப் பயன்படுத்தி வேறு பண்பளவைகளைக் கணக்கிட வேண்டியிருக்கும் போதும் திட்ட விலக்கத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு சிறந்த மைய நிலைப் போக்கு அளவைக்குரிய சிறப்புப் பண்புகளையே ஒரு சிறந்த சிதறல் அளவைக்குரிய சிறப்புப் பண்புகளாகக் கொள்ளலாம். மைய நிலைப் போக்கு அளவைகளில், எப்படி, கூட்டுச் சராசரி மிகச் சிறந்ததாக அமைகிறதோ, அதைப் போல் சிதறல் அளவைகளில் திட்ட விலக்கம் மிகச் சிறந்ததாக அமைகின்றது. திருத்தமான, நிலையான, நம்பகமான மாறுபாடு அளவை தேவைப்படும் போது, முதலில் திட்ட விலக்கத்தையும், அடுத்து வரிசைப் படி, சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம், வீச்சு ஆகியவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். ஆனால், சிதறலைத் தோராயமாக விரைவில் அளக்கக்கூடியதாக அமையும் ஓர் அளவைத் தேவைப்படும் போது, முதலில் வீச்சையும், அடுத்து வரிசைப்படி கால்மான விலக்கம், சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

5. மதிப்பளவை

மதிப்பளவு என்பது x அளவுத் திட்டத்தில் மொத்த அலைவுகளைக் குறிப்பிட்ட விகிதங்களில் பிரிக்கும் புள்ளிகளை வரை செய்யும் அளவைகளுக்குப் பொதுவாகப் பயனுகும் பெயராகும். இடைநிலை (Median) என்பது மொத்த அலைவுகளை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் நடு மதிப்பளவை. கால்மானம் (Quartile) என்பது மொத்த அலைவுகளை நான்கு சம பாங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளாகும். பதின்மானங்கள் (Deciles) என்பது மொத்த அலைவுகளைப் பத்து சம பங்குகளாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளாகும். சதமானங்கள் (Percentiles) என்பது மொத்த அலைவுகளை 100 சம பங்குகளாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளாகும். மதிப்பளவையின் இடத்தைக் கண்டறிவதற்கு x அளவுத் திட்டத்தில் கீழ் முனையிலிருந்து எண்ணத் தொடங்க வேண்டும். அலைவுப் பரவலின் சிதறல் தன்மையை, தேர்ந்தெடுத்த (Quantile) மதிப்பளவையினுல் அறியலாம்.

6. நிகழ்பிழை (Probable Error)

கண்டறிந்த முடிவுகளை எந்த அளவிற்கு நம்பகமாக ஏற்றுக் கொள்ளலாம் என்பதை அறிய நிகழ் பிழை என்ற அளவைப் பயன்படுத்தலாம்.

நிகழ்பிழை $= 0.6745 \times$ திட்ட விலக்கம் ஆகும்.

(7) **ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டின் அளவை** (The measurement of relative variation)

மாறுபாடு அளவைகளைக் குறிப்பிடும்போது அலகு அளவையால் (Unit of measurement) அல்லது அளக்கும் அளவையால் (Measuring scale) குறிப்பிடல் வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, பருமனைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்றின் மாறுபாடு அளவையைப் பவுண்டிலும் அல்லது கிலோவிலும், உயரத்தைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்றின் மாறுபாடு அளவையை அங்குலத்திலும் அல்லது சென்டி மீட்டரிலும், நுண்ணறிவு ஈவைக் குறிக்கும் பரவல் ஒன்றின் மாறுபாடு அளவையை நுண்ணறிவு ஈவு அலகிலும் குறிப்பிடல் வேண்டும். அலைவுப் பரவல்கள் (குழுக்கள்) வெவ்வேறு அலகு அளவைகளைக் கொண்டதாக இருக்கின்றபொழுது, அப் பரவல்களின் மாறுபாடு அளவைகளை அப்படியே ஒப்பு நோக்கக்கூடாது. அலகுகள் வேறுபட்டால், மாறுபாட்டினை ஒப்பு நோக்கும்போது, சிக்கல்கள் எழும். ஆனால், அலகுகள் ஒத்தனவாக இருக்கின்றபோதும்கூட, மாறுபாடு அளவைகளை ஒப்பிடும்போது, சில சமயங்களில் சிக்கல்கள் எழும். எடுத்துக்காட்டாக, குழவிகளினுடைய (Infants) உயரங்களின் மாறுபாட்டு அளவையும், முதிர்ந்தோர்களின் (Adults) உயரங்களின் மாறுபாட்டு அளவையும் அங்குலத்தில் அல்லது சென்டி மீட்டரில்தான் குறிப்பிடுகிறோம். குழவிகளின் உயரத்தின் திட்ட விலக்கம் (மாறுபாட்டு அளவை), முதிர்ந்தோர்களின் உயரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைவிட, பொதுவாக, சிறியதாகவே இருப்பதைக் காண்கிறோம். இவற்றின் மாறுபாட்டு அளவைகளைக் கொண்டு மாறுபாட்டினை அப்படியே ஒப்பிட்டால் அது தவறான முறையைத் தந்துவிடும். இம்மாறுபாட்டு அளவைகள், அவற்றிற்குத் தொடர்புடைய சராசரியோடு சேர்ந்துதான் பொருளுடையவைகளாக இருக்கின்றன என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். ஆகவே, மாறுபாடு அளவையை, ஒப்பீடு அளவையாகப் பின்வருமாறு மாற்றி அமைக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட மாறுபாட்டு அளவையை, எதினின்று (பொதுவாக, கூட்டுச் சராசரியினின்று அல்லது இடைநிலையினின்று) விலக்கங்கள் அளக்கப்படுகின்றனவோ, அந்தச் சராசரியில் வகுத்தால், அந்த அளவை மூல அலகிலிருந்து விடுபட்டுத் தனித்த உருவிலா எண்ணாகிறது. இதனை மற்ற பரவல்களில் (குழுக்களில்) கண்ட இத்தகைய எண்களோடு ஒப்பிடமுடியும். எனவே, இத்தகைய அளவையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$C.\,D = \frac{\text{சிதறல் அளவை}}{\text{சராசரி}}.$$

இதனைச் சிதறல் கெழு (Coefficient of dispersion) எனக் கூறுகிறோம். ஒப்பிட வசதியாக இருக்க இதனை 100ஆல் பெருக்கிச் சதவீதமாக அமைக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மாறுபாட்டு அளவை, அந்தப் பரவலின் சராசரியில் எவ்வளவு சதவீதம் என்பதனைச் சிதறல் அளவை கொடுக்கும். வேறுபட்ட பரவல்களின் மாறுபாட்டு அளவைகளை ஒப்பிட நடைமுறையில் பயன்படுத்தும் அளவை,

$V = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$, யாகும். இதனை மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of Variation) எனக் கூறுவர். இதனை சதவீதத்தில் அமைத்துக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு } (V) = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

இங்கு S என்பது திட்ட விலக்கம்

$\bar{x}$ என்பது கூட்டுச் சராசரி.

வேறுபட்ட பரவல்களின் மாறுபாட்டு அளவைகளை அப்படியே ஒப்பிட்டு நோக்க,

(1) பரவல்களின் மூல அளவைகள் ஒத்ததாகவும்,

(2) பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகள் ஓரளவுக்குச் சமமாகவும் இருத்தல் வேண்டும் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியது மிகவும் இன்றியமையாததாகும்.

5. கோட்ட அளவைகளும் தட்டை அளவைகளும்

(Measures of Skewness and Kurtosis)

கொடுக்கப்பட்ட அலைவுப் பரவலில் சமச்சீரின் அளவையும் அல்லது சமச்சீரின் மைய அளவையும் அறிந்துகொள்ள மேலும் ஓர் அளவை தேவைப்படுகிறது. அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலில் குறிப்புகள் மைய அளவைச் சார்ந்து சமச்சீருடையனவாக இருக்கின்றனவா அல்லது சமச்சீரின்றி சிதறியுள்ளனவா என்பதனை அறியவேண்டியது அவசியமாகின்றது. மேலும், அலைவு வளைகோட்டின் உச்சியின் வளைவுத் தன்மை எப்படி அமைந்திருக்கின்றதென அறியவேண்டியது அவசியமாகின்றது. அலைவுப் பரவலின் சிறப்பை அறிய, மைய நிலைப் போக்கு அளவை, சிதறல் அளவை, கோட்ட அளவை, தட்டை அளவை ஆகியவை தேவைப்படுகின்றன.

(1) விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (Moment)

X_1, X_2, Xn என்பன n மதிப்புகள் என்க; A என்பது எடுத்துக்கொண்ட ஏதாவது ஒரு மதிப்பென்க (எதேச்சை மூலம்). எனில்,

$$\mu^1_K = \frac{\Sigma(X_i - A)^K}{n} \text{ என்பது}$$

தொகுக்கப்படாத விவரங்களின், Kஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (K th moment about A or raw moment) ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன ஓர் அலைவுப் பரவலில் n மைய மதிப்புகள் என்க; $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ என்பன அப் பரவலில் முறையே

அம் மதிப்புகளின் அலைவெண்கள் என்க; A என்பது எதேச்சை மூலம் என்க; K என்பது மொத்த அலைவெண்கள் என்க. எனில்,

$$\mu'_K = \frac{\Sigma f_i (X_i - A)^K}{N} \text{ என்பது}$$

அலைவுப் பரவலின் Kஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை ஆகும். நடைமுறையில், μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ஆகியவை பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

$A = \overline{X}$ (கூட்டுச் சராசரி என எடுத்துக்கொள்ளும்போது,

$$\mu_K = \frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^K}{n} \text{ என்பதை}$$

தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் Kஆவது சராசரியோடு இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத்தொகை (Kth moment about Mean or Central moment) என்கின்றோம். அலைவுப் பரவலில்

$$\mu_K = \frac{\Sigma f_i (X_i - \overline{X})^K}{N} \text{ என ஆகும்.}$$

நடைமுறையில்

$$\mu_1 = \frac{\Sigma f_i (X_i - \overline{X})}{N} = 0,$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma f_i (X_i - \overline{X})^2}{N} = S^2,$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma f_i (X_i - \overline{X})^3}{N},$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma f_i (X_2 - \overline{X})^4}{N},$$

ஆகியவை பயன்படுகின்றன.

β, γ கெழுக்கள்

அலைவுப் பரவலின் தன்மையை அறியவும், புள்ளியில் ஆய்விலும் இவை பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

β (Beta) கெழுக்கள் இருவகை.

$$\beta_1 = \frac{\mu^2_3}{\mu^3_2};$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu^2_2}$$

γ (Gamma) கெழுக்களும் இருவகை.

$$\gamma_1 = + \sqrt{\beta_1}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

பின்வரும் விவரங்களுக்கு $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2, 3, 7, 8, 10

இதில், $n = 5$

$$\bar{X} = \frac{2+3+7+8+10}{5} = 6$$

$$\mu_1 = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})}{n}$$

$$= \frac{(2-6)+(3-6)+(7-6)+(8-6)+(10-6)}{5}$$

$$= \frac{(-4)+(-3)+1+2+4}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$= \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{46}{5} = 9 \cdot 2$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^3}{n}$$

$$= \frac{(2-6)^3+(3-6)^3+(7-6)^3+(8-6)^3+(10-6)^3}{5}$$

$$= \frac{-18}{5} = -3 \cdot 6.$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^4}{n}$$

$$= \frac{(2-6)^4+(3-6)^4+(7-6)^4+(8-6)^4+(10-6)^4}{5}$$

$$= \frac{610}{5} = 122.$$

$$\beta_1 = \frac{\mu^2_3}{\mu^3_2} = \frac{(3-3 \cdot 6)^2}{(9 \cdot 2)^3}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu^2_2} = \frac{122}{(9 \cdot 2)^2}$$

$$\gamma_1 = + \sqrt{\frac{(-3 \cdot 6)^2}{(9 \cdot 2)^3}}$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{122}{(9 \cdot 2)^2} - 3 \right)$$

(2) கோட்ட அளவைகள்

சில அலைவுப் பரவல்களில், கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு மூன்றும் ஒன்றும். அதாவது அலைவு வளைகோட்டில் சமச்சீரிருக்கும்போது (இயல் நிலை வளைகோட்டில்–இதனைப் பின்னர் விளக்குவோம்) இவை மூன்றும் ஒன்றும். ஆனால், சில பரவல்களில் இச் சராரரிகளுக்கிடையே வேறுபாடு இருக்கும். பரவலில் சமச்சீரில்லாதபோது இம் மூன்றும் ஒன்றிலிருந்து ஒன்று விலகும். எனவே, அலைவு வளைகோடு சமச்சீரான நிலையில், அதாவது இயல்நிலையில் அமையாது. பரவல் எத்துணை அளவிற்குச் சமச்சீரற்ற தன்மையில் அமைந்துள்ளது எனக் காண்பது இன்றியமையாததாகும். சமச்சீரற்ற தன்மை அப்

பரவலின் கோட்டமாகும். சமச்சீரற்ற தன்மையை அளக்கப் பயன்படுபவை கோட்ட அளவைகள் ஆகும். பரவல் சமச்சீரில்லாதபோது சராசரிகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளில், கூட்டுச் சராசரிக்கும் முகடுக்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் பெரிதாக இருக்கின்ற காரணத்தினல், இவ் வேறுபாட்டையே (கூட்டுச் சராசரிக்கும் முகடுக்குள்ள வேறுபாட்டையே) கோட்ட அளவையாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. பிற பரவல்களோடு ஒப்பிட, கூட்டுச் சராசரிக்கும் முகடுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை அப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தினல் வகுத்துக் கோட்டக் கெழுவினைப் பெறலாம்.

$$\text{கோட்டக் கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

இதனைப் 'பியர்ஸான் முதல் கோட்டக்கெழு' என வழங்குகின்றோம்.

முகட்டை எளிய முறையில் கணக்கிடுவது அரிதாதலால், பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\text{கோட்டக் கெழு} = \frac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

இதனைப் 'பியர்ஸான் இரண்டாவது கோட்டக் கெழு' என வழங்குகின்றோம்.

வேறு கோட்ட அளவைகளும் உண்டு. அவற்றில் சில அளவைகள் பின்வருமாறு :

$$\text{கோட்டக் கெழு} = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு

Q_3 = மூன்றாம் காகிமானம்

Q_1 = முதல் கால்மானம்

M = இடைநிலை,

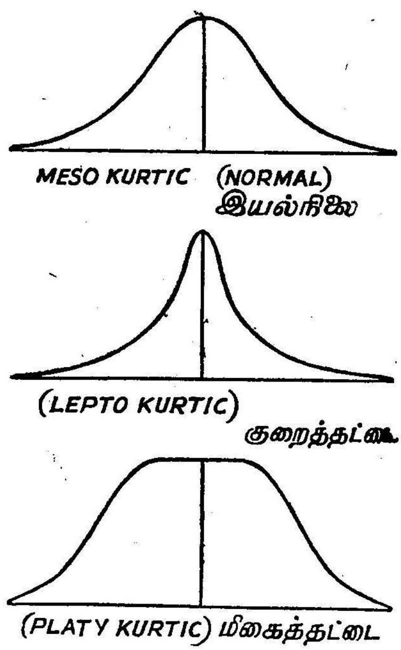
$$\text{கோட்டக் கெழு} = \beta_1 = \frac{\mu'_3}{\mu^3_2} \text{ ஆகும்.}$$

(3) தட்டை அளவை

அலைவுப் பரவலின் வளைகோட்டின் உச்சியின் வளைவுத் தன்மை எப்படி அமைகிறதென அளக்கப்படுகிறது. இயல்நிலை வளைகோட்டைவிட ஒரு பரவலின் வளைகோட்டின் உச்சியின்

வளைவு சற்றுக் கூரிய சிகரமுடையதாகவோ அல்லது சற்றுத் தட்டையுடையதாகவோ இருக்கலாம். எனவே, பரவலின் இத்தகைய தன்மையை எடுத்துக்காட்டும் இந்த அளவைக்குத் 'தட்டை அளவை' (Kurtosis) எனப் பெயராகும்.

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ என்பது தட்டை அளவையாகும்.



படம் 19.

ஒரு சமச்சீர் அல்லது ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் $\beta_2 = 3$ஆகும் எனவே, $\beta_2 < 3$ஆக அமைந்த வளைகோட்டை மிகைத் தட்டை (Platy Kurtic) யுடையதெனவும், $\beta_2 > 3$ஆக அமைந்த அலைவு வளைகோட்டை குறைத்தட்டை (Leptokurtic)யுடையதெனவும், $\beta_2 = 3$ஆக அமைந்த அலைவு வளைகோட்டை இயல்நிலையை (Normal or Mesokurtic) யுடையதெனவும் கூறுகிறோம்.

படம் 19இல் இவற்றின் அமைப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பயிற்சி 5.

(1) கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு, வீச்சு, சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2, 6, 9, 10, 16, 20.

(2) கீழ்க்கண்ட அலைவுப் பரவலுக்கு, சராசரி விலக்கம், கால்மான விலக்கம், திட்ட விலக்கம், மாறுபாடு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பு	f
40 — 44	1
35 — 39	0
30 — 34	2
25 — 29	5
20 — 24	4
15 — 19	9
10 — 14	6
5 — 9	3
0 — 4	2

(3) கீழ்க்கண்ட முதல் நூறு இயற்கை எண்களின் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் காண்க.

1, 2, 3, 4, 5,..............100.

(4) அடுத்த பக்கத்தில் உள்ள அலைவுப் பரவலுக்குரிய அலைவெண் குவிவு வளைவுகோடு அல்லது ஒகைவ் வரைந்து, வரையிலிருந்து கால்மான விலக்கத்தினைக் காண்க.

பிரிவு இடை வெளி	f
90 — 94	1
85 — 89	4
80 — 84	2
75 — 79	8
70 — 74	9
65 — 69	14
60 — 64	6
55 — 59	4
50 — 54	3

(5) அடியிற் கண்ட விவரங்களுக்கு, கோட்ட அளவையும், தட்டை அளவையும் கணக்கிடுக்.

4, 6, 10, 14, 16

(6) ஆய்வுகளின் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் கணக்கிட்ட பின்னர் ஓர் எழுதுதல் பிழை கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. மாதிரிகளின் மதிப்புகளை எழுதும் போது 25 என்பதற்குப் பதிலாக 52 எனத் தவருக எழுதப்பட்டு விட்டது. இந்த தவற்றுடன் காணப்பட்ட கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் முறையே 30, 10 ஆகும். எனில், சரியான திட்ட விலக்கத்தினைக் காண்க.

(7) *A*, *B* என்ற இரு குழுக்களிலிருந்து கண்டறிந்த விவரங்கள் வருமாறு :

குழுக்கள்	குழுக்களில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
A	20	45	8
B	30	50	6

*A*ஐயும் *B*ஐயும் இணைத்துப் பெறப்படும் குழுவின் கூட்டுச் சராசரியினையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக.

(8) கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளின் மாறுபாட்டுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

3, 5, 6, 7, 10

(9) *A*, *B* என்ற இரு புகழ் பெற்ற கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர்களின் ஓட்ட எண்ணிக்கை வருமாறு :

A : 364, 344, 306, 160, 140, 62, 45, 18, 16, 10, 6, 3

B : 281, 266, 229, 181, 125, 64, 48, 46, 41, 36, 27, 21

இவ்விரு ஆட்டக்காரர்களில் (a) மேலான (better) (b) மிகையான நிலைப்புத் தன்மையுடைய (consistent) ஆட்டக்காரர் யார் ?

(10) கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளின் திட்ட மதிப்புகளை (Standard score) காண்க.

4, 5, 9, 25, 7

(11) 'சிதறல் அளவைகள்' என்றால் என்ன? அவற்றில் முக்கியமானவற்றைக் குறிப்பிடுக.

(12) திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்புப் பண்புகளைக் கூறி, அவற்றின் பயன்களையும் கூறுக.

(13) முக்கிய மாறுபாடு அளவைகளின் சிறப்புப் பண்புகளைக் கூறி, அவற்றின் பயன்களையும் கூறுக.

(14) ஒரு சிறந்த மாறுபாட்டு அளவைக்குரிய பண்புகளைக் கூறி, அப் பண்புகளைப் பல்வேறு மாறுபாடு அளவைகள் எங்ஙனம் திருப்திபடுத்துகின்றன எனக் காண்க.

(15) 'ஷெப்பர்டின் திருத்தம்' என்றால் என்ன? இந்தப் பிழைத் திருத்தத்தினை எப்பொழுது மேற்கொள்ள வேண்டும்?

(16) 'ஒப்பீட்டு மாறுபாட்டின் அளவைகள்' என்றால் என்ன? அவற்றில் முக்கியமானவற்றைக் குறிப்பிடுக. மாறுபாட்டுக் கெழுவின் பயன் யாது?

(17) கோட்டையளவை, தட்டையளவை என்றால் என்ன?

6. ஊக அளவையும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலும்

(Probalility and Mathematical Expectation)

1. ஊக அளவை

ஒரு பரிசோதனையின் விளைவுகளை நிகழ்ச்சிகள் (Events) என்கிறோம். ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் விளைவுகள் இரண்டேயாகும்; தலை விழலாம் அல்லது பூ விழலாம். அவ்விரு விளைவுகளை இரு நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குறிய வாய்ப்பினை எண் அளவில் சொல்லப்படுவதை அந்த நிகழ்ச்சியின் ஊக அளவு (Probability) என்கிறோம். ஒரு நிகழ்ச்சி அது நிகழும் அதே தருணத்தில் பிறிதொரு நிகழ்ச்சி நிகழாவண்ணம் தடுக்குமானால் அத்தகு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மைபெற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events) எனச் சொல்லப்படுகின்றன. ஒரு நாணயத்தை ஒருமுறை சுண்டினால் தலை விழுந்தால் பூ விழுவதைத் தடுக்கும். அல்லது பூ விழுந்தால் தலை விழுவதைத் தடுக்கும்; ஒன்று நிகழும் போது பிறிதொன்று நிகழாது. ஆகவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும். நிகழ்வதற்குச் சம வாய்ப்பினையுடைய நிகழ்ச்சிகளைச் சம வாய்ப்புடைய நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely Events) எனச் சொல்கிறோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டினால் தலை விழுவதற்குரிய வாய்ப்பும், பூ விழுவதற்குரிய வாய்ப்பும் சமமாகும். எனவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகள் சம வாய்ப்புடைய நிகழ்ச்சிகளாகும். ஒரு நிகழ்ச்சி அது நிகழும் அதே தருணத்தில் பிறிதொரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதைப் பாதிக்காமல் இருப்பின், அத்தகு நிகழ்ச்சிகளுக்குச் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent events) எனப் பெயராகும். அதாவது, ஒன்றின் விளைவு மற்றொன்றைப்

பாதிக்காது. 52 சீட்டுகள் அடங்கிய ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஓர் இஸ்பேட்டும் ஒரு டைமெண்டும் உருவுவோமெனில், முதலில் உருவிய சீட்டை மறுபடியும் சீட்டுக்கட்டில் சேர்த்து விட்டால் முதல் உருவிய சீட்டு இரண்டாவதாக உருவும் சீட்டைப் பாதிக்காது. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி 'a' தடவைகளில் நிகழ முடியுமெனவும், b தடவைகளில் நிகழத்தவறும் எனவும், இந்த $(a+b)$ நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற, சம வாய்ப்பினையுடைய நிகழ்ச்சிகள் எனவும், கொண்டால், அந்நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குறிய ஊக அளவை $\frac{a}{a+b}$ என்பதாகும். அந்நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{b}{a+b}$ என்பதாகும். ஆகவே, ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழக் கூடியதை வெற்றியாகவும், அது நிகழத் தவறுவதை தோல்வியாகவும் கொண்டால், வெற்றிக்குரிய ஊக அளவை $(p) = \frac{a}{a+b}$ ஆகும். தோல்விக்குரிய ஊக அளவை $(q) = \frac{b}{a+b}$ ஆகும். மேலும்,

$$p + q = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

$$p = \frac{\text{இயல வேண்டிய நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{இயலத்தக்க நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

அதாவது,

$$p = \frac{\text{நிகழ்வதற்குச் சாதகமான விளைவுகள் (Favourable Events)}}{\text{சாத்தியமான விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை (Total number of outcomes)}}$$

என்பதனை ஊக அளவையாகக் கொள்கிறோம்.

ஒரு நிகழ்ச்சிக்குரிய ஊக அளவை $(p) = 1$ எனில், அந் நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழும் எனவும், $p = 0$ எனில், அது உறுதியாக நிகழாதெனவும் கொள்ளப்படுகிறது. வானம் கீழே விழுவதற்குரிய ஊக அளவை 0 ஆகும். இன்று வாழ்ந்து கொண்டிருக்கும் ஒருவர் ஒருநாள் இறப்பார் என்பதற்குரிய ஊக அளவை 1 ஆகும்.

புள்ளியியல் கணக்கியல் ஊக அளவை

ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் தலை விழுவதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{1}{2}$ எனவும், பூ விழுவதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{1}{2}$ எனவும் கொள்ளப்படுகிறது. இங்ஙனம், ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கு முன்னமேயே அந்த நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு தீர்மானிக்கப்படும் ஊக அளவையைக் கணக்கியல் ஊக அளவை (Mathematical Probability) அல்லது முன் கூட்டு ஊக அளவை (Apriori probability) எனக் கூறுகின்றோம். ஊக அளவையைச் சோதனைகள் வாயிலாகவும் காணலாம். ஒரு பரிசோதனைக்குப் பிறகு அதாவது நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்ந்த பின்பு நிகழ்ச்சிக்குரிய ஊக அளவை தீர்மானிக்கிறோம். அவ்வாறு தீர்மானிக்கும் ஊக அளவை 'புள்ளியியல் ஊக அளவை' (Statistical Probability) அல்லது 'பின் கூட்டு ஊக அளவை' (Aposterori Probability) என வழங்குகின்றோம். சோதனைகளைப் பலதடவைகள் திரும்பத் திரும்ப நடத்தும் போது புள்ளியியல் ஊக அளவை கணக்கியல் ஊக அளவையை நெருங்கி அமைவதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1 :

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் தலை விழுவதற்குரிய ஊக அளவை காண்க.

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் சாத்தியமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை இரண்டேயாகும். ஒன்று தலை விழும் அல்லது பூ விழும். தலை விழுவதற்குச் சாதகமான விளைவு ஒன்றேயாகும். எனவே :

தலை விழுவதற்குரிய ஊக அளவை

$$= \frac{\text{சாதகமான விளைவுகள்}}{\text{சாத்தியமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{1}{2} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2

12 மாணவர்கள் அடங்கிய ஒரு வகுப்பில் ஐவர் பெண்கள், மற்றவர்கள் ஆண்கள். அந்த வகுப்பிலிருந்து ஒரு மாணவரைத் தேர்ந்தெடுக்க அவர் ஆடவராக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை காண்க.

வகுப்பில் மொத்தம்	=	12 பேர்
இதில் பெண்கள்	=	5 பேர்

சாத்தியமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை (மொத்தம் 12 பேர் களில் யாராவது ஒருவராக இருப்பார்) = 12

தேர்ந்தெடுக்கப்படுபவர் ஆணாக இருக்கச் சாதகமான விளை வுகள் (7 ஆண்களில் யாராவது ஒருவராக இருப்பார்) = 7

∴ ஆடவராக இருப்பதற்குரிய ஊகை அளவை $= \frac{7}{12}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 3:

52 சீட்டுகள் அடங்கிய சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை உருவ, அது இராணிச் சீட்டாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை என்ன?

மொத்தச் சீட்டுகள் = 52

கட்டில் இராணிச் சீட்டுகள் = 4

மொத்த சாத்தியமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 52

இராணிச் சீட்டுக்கு சாதகமான விளைவுகள் = 4

∴ உருவிய சீட்டு இராணியாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 4:

ஒரு பையில் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் 9 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை என்ன?

பையில் மொத்தப் பந்துகள் = 16

இதில் வெள்ளைப் பந்துகள் = 7

∴ வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{7}{16}$.

கூட்டல் தேற்றம் (Addition Theorem)

ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற பல நிகழ்ச்சி களுள் ஒன்று அல்லது பிறிதொன்று நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை, அத்தகு நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி ஊக அளவை களின் கூடுதலாகும். அதாவது A_1, A_2, A_3 …… A_n என்பன

ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மைபெற்ற சம வாய்ப்பினை யுடைய n நிகழ்ச்சிகள் என்க.

A_1 நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை $P(A_1)$ எனவும்

A_2	,,	,,	$P(A_2)$	,,
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
A_n	,,	,,	$P(A_n)$ எனவும்	

கொண்டால்,

A_1 அல்லது A_2 அல்லது A_3 ...... அல்லது A_n நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை, $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... $P(A_n)$ ஆகியவற்றின் கூடுதலாகும். அதாவது, $P(A_1+A_2+ \ldots\ldots +A_n)=P(A_1)+P(A_1)+ \ldots +P(A_n)$.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 5:

ஒரு சீரான நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் தலை அல்லது பூ கிடைப்பதற்கான ஊக அளவை யாது?

தலை கிடைப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}$

பூ கிடைப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}$

தலை அல்லது பூ கிடைப்பதற்குரிய ஊக அளவை $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ (தனித்தனி ஊக அளவைகளைக் கூட்டவேண்டும்).

$^{n}c_{r}$-ம், $n!$-ம்:

$^{n}c_{r}$ அல்லது $\binom{n}{r}$ என்பது 'n' வெவ்வேறு பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு 'r' பொருள்களை யெடுத்து வரிசை நோக்காமல் சேர்த்துப்பெறும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது; அதாவது n வெவ்வேறு பொருள்களிலிருந்து 'r' பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். சூத்திரத்தின்படி,

$$^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$n\,!$ அல்லது $\lfloor n$ (காரணியப் பெருக்கம் = 'Factorial n') என்பது அடுத்தடுத்த முதல் n இயற்கையெண்களின் பெருக்கற் பலன் ஆகும். அதாவது 1–லிருந்து n வரையுள்ள முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகையைக் குறிக்கும். சூத்திரத்தின்படி,

$$n! = n(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots\ldots 3,\ 2,\ 1.$$

$$0! = 1.$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$3! = 3.\,(3-1)\,(3-2) = 3.2.1 = 6$$

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

$$2! = 2{\cdot}1 = 2$$

$$1! = 1.$$

$$^{4}c_{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1 \times 2.1} = \frac{24}{4} = 6.$$

$$^{4}c_{4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$$

$$^{7}c_{1} = \frac{7!}{1!\,6!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.6.5.4.3.2.1} = 7$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 6 :

ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 3 சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கப்படுகின்றன. 3 சீட்டுகளும் ஹார்ட்டாகவோ அல்லது கிளப்சாகவோ இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 3 சீட்டுகள் என்பதற்குரிய வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை = $^{52}c_{3}$.

அந்தச் சீட்டுக் கட்டில் ஹார்ட் சீட்டுகள் = 13

3 ஹார்ட் சீட்டுகளை எடுப்பதற்குச் சாதகமான வழிகள் = 13

3 சீட்டுகளும் ஹார்ட்டாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை

$$= \frac{{}^{13}C_{3}}{{}^{52}C_{3}}.$$

அந்தச் சீட்டுக்கட்டில் கிளப்ஸ் சீட்டுகள் = 13.

52 சீட்டுகளிலிருந்து 3 சீட்டுகளை எடுப்பதற்குச் சாத்தியமான வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{52}C_{3}$$

13 கிளப்ஸ் சீட்டுகளிலிருந்து 3 சீட்டுகளை எடுப்பதற்குச் சாதகமான வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{13}C_{3}$$

∴ 3 சீட்டுகளும் கிளப்சாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை

$$= \frac{{}^{13}C_{3}}{{}^{52}C_{3}}$$

எனவே,

3 சீட்டுகளும் ஹார்ட்டாகவோ **அல்லது** கிளப்சாகவோ இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை

$$= \frac{{}^{13}C_{3}}{{}^{52}C_{3}} + \frac{{}^{13}C_{3}}{{}^{52}C_{3}}$$

$$= \frac{286}{22100} + \frac{286}{22100} = \frac{572}{22100}$$

கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் (Compound Events)

ஒரே சமயத்தில் பல நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதைக் கூட்டு நிகழ்ச்சி என்கிறோம். 10 கறுப்புப் பந்துகளும் 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், பின்பு இரண்டு கறுப்புப் பந்துகளும் எடுப்பது கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

பெருக்கல் தேற்றம் (Multiplication Theorem)

ஒரே சமயத்தில் பல சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை, அந்தந்தச் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி ஊக அளவைகளின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும்.

'n' சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளை $A_1, A_2 \dots A_n$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

$A_1, A_2, \dots A_n$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை அந் நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி ஊக அளவைகள் $P(A_1), P(A_2) \dots P(A_n)$ ஆகியவற்றின் பெருக்கலுக்குச் சமம். அதாவது

$$P(A_1, A_2 \dots A_n) = P(A_1), P(A_2) \dots P(A_n).$$

நிபந்தனை ஊக அளவை (Conditional probability)

E_1, E_2 என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. E_1 நிகழ்ந்து விட்டதாகக் கொண்டு E_2 நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவையைக் கணக்கிட்டால், E_2-ன் ஊக அளவையை 'நிபந்தனை ஊக அளவை' என்கிறோம். இதனை $P(E_2/E_1)$ என எழுதுகிறோம். இது போன்று, E_2 நிகழ்ந்த பின் E_1 நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவையை $P(E_1/E_2)$ என எழுதுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 7:

இரு பிறழ்ச்சியற்ற நாணயங்களை ஒரு சமயத்தில் சுண்டினால், இரண்டிலும் தலை பெறுவதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

முதல் நாணயத்தில் (சுண்டினால்) தலை விழுததற்குறிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}$

இரண்டாவது நாணயத்தில் தலை பெறுவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2}$

∴ இரண்டிலும் தலை பெறுவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 8:

ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக 3 சீட்டு கள் எடுக்கப்படுகின்றன. (i) எடுத்த சீட்டை மீண்டும் கட்டில் சேர்த்த நிலையில், (ii) எடுத்த சீட்டினை மீண்டும் கட்டில் சேர்க்காத நிலையில், அம் மூன்று சீட்டுகளும் இராணி சீட்டுகளாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

(i) எடுத்த சீட்டினை மீண்டும் சீட்டுக்கட்டில் சேர்த்த நிலையில்:

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் மொத்த இராணிச் சீட்டுகள் = 4.

முதலில் எடுக்கப்படும் சீட்டு இராணிச் சீட்டாக இருப்பதற் குரிய ஊக அளவை $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

இப்பொழுது அந்தக் கட்டில் 51 சீட்டுகள்தான் உள்ளன எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் கட்டில் சேர்க்கப்படுகிறது. இப்பொழுது கட்டில் மொத்தம் 53 சீட்டுகள் உள்ளன. அதில் இராணிச் சீட்டுகள் 4 ஆகும்.

எனவே, இரண்டாவதாக எடுக்கப்படும் (இரண்டாவது சீட்டு), சீட்டு இராணிச் சீட்டாக அமைவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

எனவே, எடுக்கப்பட்ட மூன்று சீட்டுகளும் இராணிச் சீட்டு களாக அமைவதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{2197}$

(ii) எடுத்த சீட்டினை மீண்டும் கட்டில் சேர்க்காத நிலையில் :

முதல் எடுக்கப்படும் சீட்டு இராணிச் சீட்டாக அமைவதற் குரிய ஊக அளவை $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. எடுக்கப்பட்ட சீட்டை மீண்டும் கட்டில் சேர்க்காமலிருந்தால் இப்பொழுது கட்டில் 51 சீட்டுகள் தான் உள்ளன. ஓர் இராணிச் சீட்டு எடுக்கப்பட்டு விட்டதால், சீட்டுக்கட்டில் இப்பொழுது மூன்று இராணிச் சீட்டுகள்தான் உள்ளன.

எனவே, இரண்டாவது இராணிச் சீட்டு கட்டிலிருந்து எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{3}{51}$. இப்பொழுது முதலில் எடுக்

கப்பட்ட 2 இராணி சீட்டுகளையும் கட்டில் சேர்க்காமலிருந்தால் கட்டிலுள்ள சீட்டுகள் = 50

இதில் இராணிச் சீட்டுகள் = 2

எனவே,

மூன்றாவது இராணிச் சீட்டு எடுப்பதற்கான ஊக அளவை = $\frac{2}{50}$

∴ அம் மூன்று சீட்டுகளும் இராணிச் சீட்டுகளாக அமைவதற்குரிய ஊக அளவை =

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50}$$

$$= \frac{24}{52 \times 51 \times 50}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 9 :

ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு, 10 பச்சை பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. முதலில் எடுத்த பந்தினை மீண்டும் பெட்டியில் போடாத நிலையில், அவ்விரு பந்துகளில் ஒன்று சிவப்பாகவும், ஒன்று பச்சையாகவும் அமைவதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

முதலில் சிவப்புப் பந்து எடுப்பதாகக் கொள்வோம்

முதலில் சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை = $\frac{5}{15}$. எடுத்த சிவப்புப் பந்தை மீண்டும் போடாததால், பெட்டியில் இப்பொழுது 14 பந்துகள்தான் உள்ளன. எனவே, 2ஆவது பச்சைப்பந்து எடுக்க ஊக அளவை (பெட்டியில் 4 சிவப்பு, 10 பச்சைப் பந்துகள் இருப்பதால்) = $\frac{10}{14}$.

∴ முதலில் சிவப்புப் பந்தும், பிறகு பச்சைப் பந்தும் எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை = $\frac{5}{15} \times \frac{10}{14}$

$$= \frac{50}{210} = \frac{5}{21}$$

முதலில் பச்சைப் பந்து எடுப்பதாகக் கொள்வோம்

முதலில் பச்சைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

எடுத்த பச்சைப் பந்தை மீண்டும் போடாததால் பெட்டியில் 5 சிவப்புப் பந்துகளும் 9 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. எனவே, அடுத்ததாகச் சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{5}{14}$

∴ முதலில் பச்சைப் பந்தும், பிறகு சிவப்புப் பந்தும் எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{2}{3} \times \frac{5}{14}$

$$= \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

எனவே, ஒரு பச்சைப் பந்தும் ஒரு சிவப்புப் பந்தும் (முதலில் சிவப்புப் பந்தும், பிறகு பச்சைப் பந்தும் **அல்லது** முதலில் பச்சைப் பந்தும் பிறகு சிவப்புப் பந்தும்) எடுப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \frac{5}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$

(2) கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் (Mathematical expectation)

X என்ற மாறியின், $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளோடு இணைந்த ஊக அளவைகள் முறையே $p_1, p_2, \ldots p_n$ $(p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1)$ ஆக அமையுமாயின்,

$E(\mathbf{x}) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$ என்பது **x**–ன் எதிர்பார்த்தல் (Expectation of **x**) எனக் கூறப்படுகிறது.

எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு பணத் தொகை 'K' பெறுவதற்குரிய ஊக அளவை p எனில் எதிர்பார்க்கும் தொகை $(p \times k)$ ஆகும்.

எருவர் 15 ரூபாய் பரிசுத் தொகை பெறுவதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{1}{3}$ எனில், அவர் எதிர்பார்க்கும் தொகை $= 15 \times \frac{1}{3}$ $= 5$ ரூபாய் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1 :

ஒருவர் ஒரு பரிசுச் சீட்டை வாங்கினால் ஒரு முதல் பரிசுத் தொகையான ரூ. 2000ஐ 0.01 ஊக அளவையுடன் அல்லது ஒரு இரண்டாவது பரிசுத் தொகையான ரூ. 500ஐ 0.03 ஊக அளவையுடன் அவர் அடைய முடியும் எனில், அந்தப் பரிசுச் சீட்டுக்கு நியாயமான விலையாக எவ்வளவு கொடுக்கலாம்?

எதிர்பார்த்தல் $= 2000 \times .01 + 500 \times .03$

$= 20 + 15$

$= 35$ ரூபாய்

நியாயமான விலையாக ரூ. 35 அந்தப் பரிசுச் சீட்டுக்கு கொடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2 :

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வியாபாரத்தில் 0·6 ஊக அளவையுடன் ரூ. 500 இலாபத்தை அல்லது 0·4 ஊக அளவையுடன் ரூ. 50 நஷ்டத்தை ஒருவர் பெறமுடியும் எனில், அவர் எதிர்பார்ப்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

எதிர்பார்க்கும் இலாபம் $= 500 \times 0{\cdot}6$ ரூபாய்

$= 300$ ரூபாய்

எதிர்பார்க்கும் நஷ்டம் $= 50 \times 0\ 4$

$= 20$ ரூபாய்

∴ அந்த வியாபாரத்தில் அவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபம் } $= 300{\cdot}20$ ரூ.

$= 280$ ரூ.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 3 :

ஒரு சாதாரண பகடையை (die) ஒரு தடவை வீசி எறிந்தால் நாம் பெறும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைக் காண்க.

புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை X (மாறி) என்க. ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஊக அளவை $\frac{1}{6}$-யுடன் X மாறி 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய ஆறு மதிப்புகளைப் பெறும்.

எனவே,

$$E(X) = P_1X_1 + P_2X_2 + \dots P_6X_6$$

$$= (\tfrac{1}{6} \times 1) + (\tfrac{1}{6} \times 2) + (\tfrac{1}{6} \times 3) + (\tfrac{1}{6} \times 4) + (\tfrac{1}{6} \times 5) + (\tfrac{1}{6} \times 6)$$

$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{6}{6} = \tfrac{21}{6} = \tfrac{7}{2}$$

∴ எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $= 3{\cdot}5$

பயிற்சி 6.

(1) ஒரு கணக்கிற்குத் தீர்வு காண *A*-க்குரிய ஊக அளவை $\frac{2}{3}$; *B*-க்குரியது $\frac{4}{5}$. இருவரும் முயன்றால், கணக்கின் தீர்வு காணப் படுவதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

(2) நன்கு கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரே சமயத்தில், இரண்டு சீட்டுகள் உருவப்படுகின்றன. அவை ஒன்று ஏசாகவும், பிறிதொன்று ஜாக்காகவும் அமைவதற்குரிய ஊக அளவைக் காண்க.

(3) ஒரு பையில் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. 5 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றில் மூன்று வெள்ளையாகவும், 2 கறுப்பாகவும் அமைவதற்குரிய ஊக அளவை என்ன?

(4) இரு பகடைகளைச் சுற்றிவிட, விழும் புள்ளிகளின் கூடுதல் 8 ஆக அமைவதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

(5) ஒருவர் 25 வருடங்கள் வாழ்வதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{3}{5}$; அவர் மனைவி 25 வருடங்கள் வாழ்வதற்குரிய ஊக அளவை $\frac{2}{3}$. இருவரும் உயிருடன் இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

(6) ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு, 10 பச்சைக் கோலிகள் உள்ளன. 8 கோலிகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. (1) ஒவ்வொரு கோலியும் எடுத்த பின்னர், மீண்டும் பெட்டியில் போடப்பட்டால், (2) அவ்வாறு போடாமல் இருந்தால், 3 சிவப்பாகவும், 5 பச்சையாகவும் அமைவதற்குரிய ஊக அளவை யாது?

(7) 3 சிவப்புப் பந்துகளையும், 2 வெள்ளைப் பந்துகளையும் கொண்ட ஒரு பெட்டியிலிருந்து ஒருவர் 2 பந்துகளை ராண்டம் முறையில் (ஒரு பந்து எடுத்தவுடன் மீண்டும் அதனைப் பெட்டியில் போடாத நிலையில்) எடுக்கின்றார். அவர் எடுக்கும் ஒவ்வொரு சிவப்புப் பந்துக்கும் ரூ. 20ஐ அவருக்குத் தருவதாகவும், ஒவ்வொரு வெள்ளைப் பந்துக்கும் ரூ. 10ஐ அவருக்குத் தருவதாகவும் கொண்டால், அவர் எதிர்பார்க்கும் தொகை எவ்வளவு என்பதனைக் காண்க.

(8) ஒரு நாணயம் 6 தடவைகள் சுண்டப்பட்டது 1, 2, 3, 4, 5, 6ஆவது தடவைகளில் தலை விழுந்தால் முறையே

ரூ. 1, 2, 0, 4, 5, 6ஐ ஒருவர் பெறுவார். பூ விழுந்தால், அதே தொகையை அம் முறைப்படி அவர் தரவேண்டும். அவர் எதிர் பார்க்கும் இலாபம் யாது ?

(9) ஊக அளவை என்றால் என்ன ? கணக்கியல் ஊக அளவைக்கும், புள்ளியியல் ஊக அளவைக்குமுள்ள வேறுபாடு யாது ?

(10) கீழ்க் கண்டவற்றை விளக்கி, ஒவ்வொன்றுக்கும் இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

(i) நிகழ்ச்சி

(ii) ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள்

(iii) சம வாய்ப்புடைய நிகழ்ச்சிகள்

(iv) சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

(v) கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்

(vi) நிபந்தனை ஊக அளவை

7. ஈருறுப்புப் பரவலும் பாய்ஸான் பரவலும்

(Binomial distribution and Poisson distribution)

1. ஈருறுப்புப் பரவல்

a, b என்ற இரண்டு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டி ஞல் நான்கு வகையான விளைவுகள் கிடைக்கலாம். அதாவது;

(1) இரண்டிலும் தலைகள் (அல்லது),

(2) இரண்டிலும் பூக்கள் (அல்லது),

(3) ஒன்றில் தலையும் மற்றதில் பூவும் (அல்லது),

(4) ஒன்றில் பூவும், மற்ருென்றில் தலையும் விழலாம். இவற் றைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்போம்.

1	2	3	4
a b	a b	a b	a b
த த	பூ பூ	த பூ	பூ த

இந்த நான்கு விளைவுகளில் ஏதாவது ஒன்று நிகழும். தலை விழுந்தால் வெற்றியெனவும், பூ விழுந்தால் தோல்வியெனவும் கொண்டால், வெற்றிக்குரிய ஊக அளவையை p எனவும் தோல்விற்குரிய ஊக அளவையை q எனவும் எழுதலாம்.

a, b ஆகிய இரு நாணயங்களிலும் தலைகள் கிடைப்பது குரிய(இரண்டிலும் வெற்றிக்குரிய) ஊக அளவை $= p \times p = p^2$

இரண்டு நாணயங்களிலும் பூக்கள் கிடைப்பதற்குரிய (இரண்டிலும் தோல்விக்குரிய) ஊக அளவை $= q \times q = q^2$

a என்ற நாணயத்தில் தலையும், b என்ற நாணத்தில் பூவும் (a-ல் வெற்றியும் b-ல் தோல்வியும்) கிடைப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= p \times q = pq$.

a என்ற நாணயத்தில் பூவும் b என்ற நாணயத்தில் தலையும் (a-ல் தோல்வியும் b-ல் வெற்றியும்) கிடைப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= q \times p = qp$.

எனவே, a, b என்ற இரு நாணயங்களை ஏக காலத்தில் சுண்டினால், இரண்டிலும் தலைகள் **அல்லது** இரண்டிலும் பூக்கள் **அல்லது** a-ல் தலையும் b-ல் பூவும் **அல்லது** a-ல் பூவும் b-ல் தலையும் கிடைப்பதற்குரிய ஊக அளவை (தனி விளைவுகளின் ஊக அளவைகளைக் கூட்டவேண்டும்) =

$$= p^2 + q^2 + pq + qp$$
$$= p^2 + q^2 + 2pq$$
$$= (p+q)^2 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, தனி நிகழ்ச்சிகளின் ஊக அளவைகள் தெரிந்தால் பலவித சேர்க்கைகளின் ஊக அளவைகள் ஈருறுப்புக் கோவையின் (Binomial Expansion) அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும். இரு நிகழ்ச்சிகள் இங்கே அடங்கும்போது நமக்கு $(p+q)^2$ என்று கிடைக்கிறது.

இதுபோல, a, b, c என்ற மூன்று நாணயங்களை ஏக காலத்தில் சுண்டினால் 8 வகையான விளைவுகள் கிடைக்கும்.

1	2	3	4
a b c	a b c	a b c	a b c
த த த	பூ பூ பூ	த பூ பூ	த த பூ
5	**6**	**7**	**8**
a b c	a b c	a b c	a b c
த பூ த	பூ த த	பூ த பூ	பூ பூ த

மூன்று தலைகள் கிடைப்பதற்கான (மூன்று வெற்றிகள்) ஊக அளவை $= p \times p \times p = p^3$

3 பூக்கள் கிடைப்பதற்கான (மூன்று தோல்விகள்) ஊக அளவை $= q \times q \times q = q^3$

a–ல் தலையும் மற்றவற்றில் பூவும் கிடைப்பதற்கான (1 வெற்றி, 2 தோல்விகள்) ஊக அளவை $= p \times q \times q = pq$

a, *b* இரண்டில் தலைகளும், *c*–ல் பூவும் கிடைப்பதற்கான (2 வெற்றிகள் 1 தோல்வி) ஊக அளவை $p \times p \times q = p^2 q$

a, *c*–களில் தலைகளும் *b*-ல் பூவும் கிடைப்பதற்கான (2 வெற்றிகள், 1 தோல்வி) ஊக அளவை $= p \times q \times p = p^2 q$

a-ல் பூவும், மற்றவற்றில் தலைகளும் கிடைப்பதற்கான (1 தோல்வி, 2 வெற்றிகள்) ஊக அளவை $= q \times p \times p = qp^2$

a, *c*–களில் பூவும் *b*-ல் தலையும் கிடைப்பதற்கான (2 தோல்விகள், 1 வெற்றி) ஊக அளவை $= q \times p \times q = p\,q^2$

a, *b*–களில் பூக்களும், *c*-ல் தலையும் கிடைப்பதற்கான (தோல்விகள், 1 வெற்றி) ஊக அளவை $= q \times q \times p = p\,q^2$

எனவே, மூன்று நாணயங்களை (3 நிகழ்ச்சிகள்) ஏக காலத்தில் சுண்டினுல் 8 விளைவுகளில் ஏதாவது ஒன்று நிகழ்வதற்குரிய ஊக அளவை (தனி விளைவுகளின் ஊக அளவைகளைக் கூட்ட வேண்டும்) $= p^3+q^3+pq^2+p^2q+p^2q+p^2q+pq^2+pq^2$

$$= p^3+q^3+3\,p^2q+3pq^2$$

$$= (p+q)^3$$

இங்கு 3 சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் இருப்பதால் ஈருறுப்பின் புடியாவது (Expanent) மூன்ருகி $(p + q)^3$ என்று கிடைக்கிறது. ஏனவே, சாத்தியமான பலவகை முடிவுகளின் ஊக அளவைகள் $(p + q)^3$ என்ற கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும்.

இதுபோல 4 நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டினுல் $(2^4 =)16$ வகையான விளைவுகள் கிடைக்கும். சாத்தியமான விளைவுகளின் ஊக அளவைகள்,

$(p+q)^4$ என்ற கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும். இங்கே 4 நிகழ்ச்சிகள் (நாணயங்கள்) இருப்பதால் ஈருறுப்பின் படியாவது நான்காக அமைகிறது.

மேலே கூறிய செயல் முறையைப் பொதுவாகக் கூறலாம். n சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளில், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான ஊக அளவை p எனவும், அது தோல்வியடைவதற்குரிய ஊக அளவை q எனவும் கொண்டால், பலவகையான முடிவுகளில் n வெற்றிகள் $(n-1)$ வெற்றிகள், $(n-2)$ வெற்றிகள், ... 0 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான ஊக அளவைகள் $(p+q)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிவுக் கோவையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளால் கிடைக்கும்.

தனித்த ஊக அளவைகள் $(p+q)^n$-லிருந்து அறிவதற்குப் பதிலாக பல்வேறு விளைவுகளின் அலைவெண்களைக் காண்பதற்கு $(p+q)^n$ஐ சோதனைகளின் எண்ணிக்கையால் (Nஆல்) பெருக்கி, $N(p+q)^n$ என்ற கோவை யிலிருந்து கணிக்கலாம். இதில் n என்பது சோதனையில் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையாகும்;

$$(q+p)^n = q^n \binom{n}{1} q^{n-1} P + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + \ldots$$

$$+ \binom{n}{\gamma} p^r q^{n-r} + \ldots + p^n \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது, சரியாக, r வெற்றிகளுக்குரிய ஊக அளவை

$$P(\gamma) = \binom{n}{r} p^\gamma q^{n-\gamma} \text{ ம்}$$

சரியாக, r வெற்றிகள் நிகழும் தடவைகளை

$$N \cdot \binom{n}{r} p^\gamma q^{n-\gamma} \text{ - ம் தருகின்றன.}$$

மேற்கூறிய செயல்முறையைக் கீழ்க்கண்டபடி அமைக்கலாம்.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை	ஊக அளவை	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	q^n	$N \cdot q^n$
1	$\binom{n}{1} p \cdot q^{n-1}$	$N \binom{n}{1} p \cdot q^{n-1}$
2	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	$N \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$
⋮	⋮	⋮
r	$\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$	$N \cdot \binom{n}{\gamma} p^{\gamma} q^{n-\gamma}$
⋮	⋮	⋮
n	p^n	$N p^n$
மொத்தம்	$(q+p)^n$	$N(q+p)^n$

இவ்வாறு பெறப்படும் அலைவுப் பரவலுக்கு ''ஈருறுப்புப் பரவல்'' எனப் பெயராகும். ஜேம்ஸ் பெர்நௌலி (James Bernoulli) என்பவர் 17ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் இதனை முதன் முதலாகக் கண்டார். எனவே, இதனைப் 'பெர்நௌலி பரவல்' என்றும் வழங்குவதுண்டு. இஃது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற பரவலாகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சில சிறப்புப் பண்புகள்

இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $= np$

இப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{npq}$

மாறுபாடு $= npq$

$$\beta_1 = \frac{(q-p)^2}{npq}$$

கோட்டக் கெழு $= \dfrac{(q-p)}{\sqrt{npq}}$

தட்டைக் கெழு $(\beta_2) = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

10 பிறழ்ச்சியற்ற நாணயங்களை ஏக காலத்தில் சுண்டினுல், சரியாக நான்கு தலைகளைப் பெறுவதற்கான ஊக அளவைக் காண்க.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டினுல் தலை விழுவதற்கான ஊக அளவை $(P) = \frac{1}{2}$

$$n = 10$$

n (சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளில்) நாணயங்களை ஏக காலத்தில் சுண்டினுல் சரியாக x தலைகளும், $(n-x)$ பூக்களும் கிடைப்பதற்கான ஊக அளவை

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, சரியாக 4 தலைகள் பெறுவதற்கான ஊக அளவை,

$$P(4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

கூட்டுச் சராசரி 20, மாறுபாடு 4 என அமைந்த ஈருறுப்புப் பரவலைக் காண்க.

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } (\bar{x}) = 20 = np$$

$$\text{மாறுபாடு } (\sigma^2) = 4 = npq$$

$$(np)q = 4$$

$$20q = 4$$

$$q = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$np = 20$$

$$n\frac{4}{5} = 20$$

$$4n = 100$$

$$n = 25$$

∴ ஈருறுப்புப் பரவல், $(q+p)^n$

$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{25} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

கல்லூரியில் சேரும் ஒரு மாணவன் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான ஊக அளவை ·4 எனில், 5 மாணவர்களில் ஒரு மாணவன் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான ஊக அளவை யாது?

இங்கு $p = \cdot 4;\ n = 5$

5 மாணவர்களில் ஒரு மாணவன் பட்டதாரியக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை $= \binom{5}{1}(\cdot 4)^1\,(\cdot 6)^4$

$$= \cdot 26$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

5 பகடைகள் ஒன்றாக 96 தடவைகள் வீசப்பட்டன. 1 அல்லது 3 அல்லது 4 புள்ளிகள் விழுவது வெற்றியாகக் கருதப்பட்டது. அவை விழுந்த எண்ணிக்கை வருமாறு :

1, 3 அல்லது 4 முகப் புள்ளிகள் விழுந்தது (வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை)	0	1	2	3	4	5
நேரில் கண்ட அலைவெண்	1	10	24	35	18	8

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காண்க.

இஃது ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

$$n = 5$$

$$N = 96$$

வெற்றி = 1, 3 அல்லது 4

புள்ளி 1-க்கான ஊக அளவை $= \frac{1}{6}$

புள்ளி 3 விழுவதற்குரிய ஊக ,, $= \frac{1}{6}$

புள்ளி 4 ,, ,, $= \frac{1}{6}$

எனவே, புள்ளி 1, 3 அல்லது 4 விழுவதற்குரிய (அதாவது, வெற்றிக்குரிய) ஊக அளவை $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

எனவே $P = \frac{1}{2}$; $q = 1 - P$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\gamma) = \binom{n}{\gamma} q^{n-\gamma} P^{\gamma}$$

சரியாக r வெற்றிகளுக்குரிய அலைவெண் $= N\,P(\gamma)$

எனவே,

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் :

$\gamma = 0$ எனில்,

$$N\,P(0) = N\binom{n}{0} q^n P^0$$

$$= 96\binom{5}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = 96\left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= 3$$

$\gamma = 1$ எனில்,

$$N\,P(1) = N\left(\frac{n}{1}\right) q^{n-1} P^1$$

$$= 96\binom{5}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{5-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 96 \times \binom{5}{1} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= 15$$

$r = 2$ எனில்,

$$N\,P(2) = 96 \times \binom{5}{2} \times {}^{5-2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 96 \times \binom{5}{2} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= 30$$

$r = 3$, எனில்

$$N\,P(3) = 96 \times \binom{5}{3} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^{5-3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 96 \times \binom{5}{3} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= 30$$

$r = 4$ எனில்

$$N\,P(4) = 96 \times \binom{5}{4} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^{5-4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = 96 \times \binom{5}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= 15$$

$$N\,P(5) = 96 \times \binom{5}{5} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^{5-5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = 96 \times 1 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= 3.$$

∴ எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் :

3, 15, 30, 30, 15, 3.

2. பாய்ஸான் பரவல் (Poisson distribution)

ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு நிகழ்வதற்குரிய (வெற்றிக்குரிய) ஊக அளவை, p ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கி இருக்கும்போது (அதாவது, $q=1-p$, ஆனது ஒன்றை நெருங்கி இருக்கும்போது) அந்த நிகழ்ச்சியை அரிய நிகழ்ச்சி (rare event) என்கிறோம். முயற்சிகளின் (Trials) எண்ணிக்கை, n ஆனது 50-க்கு மேல் இருந்து, எதிர்பார்க்கும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை, np ஆனது 5-க்குக் கீழ் இருந்தால் அத்தகைய நிகழ்ச்சிகளை நடைமுறையில் அரிய நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். ஈருறுப்புப் பரவல்,

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\text{-ல்}$$

நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை (nஆனது) மிக அதிகமாகவும், வெற்றிக்குரிய ஊக அளவை (pஆனது) மிகச் சிறியதாகவும் ஆனால், np முடிவுள்ளதாகவும் (finite) அமையுமானால், ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்ஸான் பரவலாக மாறுகிறது. வெற்றிக்குரிய ஊக அளவை மிகச் சிறியதெனில் நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு மிகச் சிறியதென பொருளாகும். எனவே, எப்பொழுதோ ஒரு முறை நிகழ்கின்ற அரிய நிகழ்ச்சிகள் இந்தப் பரவலில் அமைகின்றன. பாய்ஸான் பரவல்,

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x\,!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

இதில் $\lambda = np =$ கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறிலி

$e = 2{\cdot}71828.$

இந்தப் பரவலைப் பாய்ஸான் என்பவர் 19ஆம் நூற்றாண்டின் முதற் பகுதியில் கண்டார். பாய்ஸான் பரவலும் தொடர்ச்சியற்ற ஒரு பரவலாகும்.

பாய்ஸான் பரவலின் சில சிறப்புப் பண்புகள்

1. கூட்டுச் சராசரி $= \lambda = np$
2. மாறுபாடு $= \lambda = np$
3. $\beta_1 = \dfrac{1}{\lambda}$
4. $\beta_2 = 3 + \dfrac{1}{\lambda}$

புள்ளி விவர ஆய்வில் ஒரே நிகழ்ச்சி ஒரு தடவைக்குமேல் நிகழக்கூடியதாக அமையுமானால் அத்தகைய நிகழ்ச்சிகளில் பாய்ஸான் பரவலே பொருத்தமாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குறித்த கால அளவில் ஏற்படுகின்ற மோட்டார் வண்டி விபத்துகளில், ஒரே ஓட்டுநர் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விபத்துகளுக்கு உள்ளாகியிருக்கலாம். எனவே, இத்தகைய நிகழ்ச்கிகளுக்கு ஈருறுப்புப் பரவல் பொருத்தமாக இருக்காது.

'விபத்துகளால், குதிரை உதைப்பதால், அரிய நோய்களால் ஏற்படுகின்ற இறப்புகள், ஒரு புத்தகத்தில் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் ஏற்படும் அச்சிடுவோரின் பிழைகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு நூலகத்தில் ஒவ்வொரு நாளும் காணமல் போனதாக கூறப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை போன்றவை இப் பரவலில் அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1 :

ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கும் மின்சார விளக்குகளில் (Electric bulbs) 3% குறையுள்ளவைகளானல், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 மின்சார விளக்குகளில் சரியாக 5 விளக்குகள் குறையுள்ளவைகளாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை யாது ?

100 மின்சார விளக்குகளில் 3 விளக்குகள் குறையுள்ளவைகளாக இருப்பதால், இது பாய்ஸான் பரவலில் அமைவதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, பாய்ஸான் பரவலில், சரியாக x வெற்றிக்குரிய ஊக அளவை,

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x\,!} \text{ ஆகும்}$$

இங்கு $\lambda = np$ ஆகும்

$n = 100$ = தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட விளக்குகள்.

$p = \frac{3}{100}$ = குறையுள்ளதாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை.

$$\therefore \gamma = np\ 100 = \times \frac{3}{100} = 3,$$

எனவே, சரியாக 5 குறையுள்ளவைகளாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவை

$$p(5) = \frac{e^{-3}\, 3^5}{5\,!}$$

$$= \cdot 1008$$

∴ ஊக அளவை = ·1008

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2:

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குரிய எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

x:	0	1	2	3	4
f:	122	60	15	2	1

$$N = 122+60+15+2+1$$

$$= 200$$

கூட்டுச்சராசரி $= \frac{(0\times 122)+(1\times 60)+(2\times 15)+(3\times 2)+(4\times 1)}{200}$

$$= \frac{0+60+30+6+4}{200} = \frac{100}{200}$$

$$= \tfrac{1}{2} = .5$$

∴ கூட்டுச் சராசரி $= \lambda = \cdot 5$

சரியாக x வெற்றிக்குரிய ஊக அளவை,

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^x}{x\,!}$$

சரியாக x வெற்றிக்குரிய எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்,

$$N P(x) = N \frac{e^{-\gamma}\, \lambda^x}{x\,!}$$

$$e^{-\lambda} = e^{-\cdot 5} = \cdot 61$$

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் :

$$200\,P(0) = 200 \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0\,!} = \frac{200 \times \cdot 61 \times (\cdot 5)^{0}}{1} = 200 \times \cdot 61$$

$$= 122$$

$$200\,P(1) = 200 \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1\,!} = \frac{200 \times \cdot 61 \times \cdot 5}{1} = 61$$

$$200\,P(2) = 200 \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2\,!} = \frac{200 \times \cdot 61 \times \cdot 5^{2}}{2} = 15$$

$$200\,P(3) = 200 \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^{3}}{3\,!} = \frac{200 \times \cdot 61 \times (\cdot 5)^{3}}{6} = 2$$

$$200\,P(4) = 200 \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^{4}}{4\,!} = \frac{200 \times \cdot 61 \times (\cdot 5)^{4}}{24} \simeq 0$$

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் முறையே : 122, 61, 15, 2, 0.

பயிற்சி 7.

(1) ஒருதலைச் சார்பற்ற நல்ல நாணயமொன்றினை 3 தடவைகள் சுண்டினால், (i) 3 தலைகளாக (ii) 2 தலைகளாக, 1 பூவாக (iii) 3 பூக்களாக இருப்பதற்குரிய ஊக அளவைக் காண்க.

(2) ஒவ்வொரு தடவையும் 8 நாணயங்கள் வீதம் 256 தடவைகள் வீசப்பட்டன. ஒவ்வொரு தடவையும் விழுந்த பூக்களின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்பட்டது. அவை வருமாறு :

பூக்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	8
அலைவெண்:	2	6	30	52	67	56	32	10	1

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காண்க.

(3) கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குரிய பாய்ஸான் பரவலைக் காண்க எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

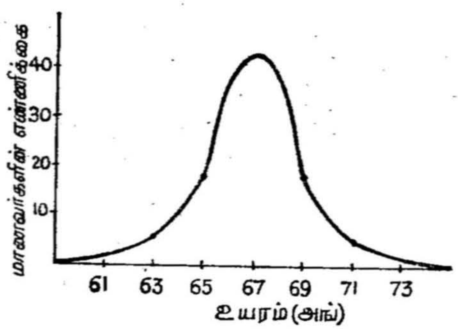
x:	0	1	2	3	4
f:	109	65	22	3	1.

8. இயல்நிலைப் பரவல்
(Normal Distribution)

புள்ளியியல் கொள்கைகளிலும், அவற்றின் செய்முறை நடப்புகளிலும் இயல்நிலைப் பரவல் முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றிருக்கின்றது. உளவியல், சமூகவியல், உயிரியல் முதலியனவற்றிலிருந்து சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் அலைவுப் பரவல் ஏறத்தாழ இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும். கண்டறிந்த குறிப்புகளின் பிழைகளும், மாதிரியிலிருந்து முழுமைத் தொகுதிகளின் பண்பளவைகளை மதிப்பிடும் பொழுது ஏற்படுகின்ற பிழைகளும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகின்றன. இயற்கையில் பல நிகழ்ச்சிகளின் அலைவுப் பரவல்களும் ஏறத்தாழ இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதாலும், மாதிரிக் கொள்கையில் இந்தப் பரவலின் சிறப்பு அதிகரித்ததினாலும் இந்தப் பரவலானது புள்ளியியலின் ஒரு தூணாக அமைந்து, அலைவுப் பரவல்கள் அனைத்திலும் மிகச் சிறப்பானதாகவும், முக்கியமானதாகவும் திகழ்கிறது. கி. பி. 1753 ஆம் ஆண்டில் டிமாய்வர் (De Moivre) என்பவர் ஊக அளவையின் அடிப்படையில், தொடர்ச்சியற்ற ஈருறுப்புப் பரவலின் வரம்பாக அமையும் தொடர்ச்சியான அலைவுப் பரவலாக இதனைக் கண்டறிந்து வரையறை செய்தார். பிறகு 18ஆம் நூற்றாண்டில் சி. எஃப் காஸ் (C. F. Gauss) என்பாரும், பி. எஸ். லாப்லாஸ் (P. S. Laplace) என்பாரும் தனித்தனியே மீண்டும் அதனைக் கண்டு பிடித்தார்கள்.

இயற்கையில் பல நிகழ்ச்சிகளின் அலைவுப் பரவல்களுக்கான ஒரு குறிப்பிட்ட மணி வடிவ (Bell shaped) வளைகோட்டை ஒத்ததாக இருப்பதை நடைமுறையில் காண்கிறோம். அடியிற் காணும் அலைவுப் பரவலைக் கவனிப்போம். உயரம், ஒரு தொடர் மாறியாகையால், கொடுக்கப்பட்ட பரவலும் ஒரு தொடர்ச்சியான அலைவுப் பரவலாகும்.

உயரம் (அங்குலத்தில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
60 — 62	2
62 — 64	5
64 — 66	18
66 — 68	42
68 — 70	18
70 — 72	5
72 — 74	2



படம் 20.

மேற்காணும் அலைவுப் பரவலின் விவரங்களை ஒரு கோடியிலிருந்து மறுகோடிவரை ஆராய்ந்தால், பரவலின் அடுத்தடுத்த பிரிவு அலைவுகள் ஓர் ஒழுங்குடன் அதிகரித்து, சராசரி (=67-ல்) உச்சத்தையடைந்து பின் அது போலவே குறைவுபடுகின்றன. இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, இடை நிலை, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுகின்றன. இந்தப் பரவலுக்கான வளைகோட்டின் அமைப்பு படம் 20–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த வளைக் கோட்டில், உச்ச குத்தாயம் (highest ordinate) சராசரியில் அமையும். உச்ச குத்தாயத்திற்கு இரு புறமும் வளைகோடுச் சமச் சீராக இருப்பதையும் அறிவோம். இத்தகைய வளைகோடுகளை விழுமிய சமச்சீரான வளைகோடுகள் (Ideal symmetrical curves) என்கிறோம். இத்தகைய வளைகோடுகளை நடைமுறையில் காண்பது அரிது எனினும், இந்த வளைகோட்டின் வடிவத்தை யொத்த வளைகோடுகள் பலவற்றை அடிக்கடி காண்கிறோம்.

சமச் சீரான வளைகோடுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையைச் சார்ந்த, மணி வடிவத்தை யொத்த வளைகோட்டை இயல்நிலை வளைகோடு (Normal curve) என வழங்குகின்றோம். இந்த வளை கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதும் போது y என்ற அலைவை X மாறியின் கோவையாக எழுதுகிறோம். இந்த விரிவுக்கோவையை

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma}}$$ என்ற வடிவத்தில் எழுதுகிறோம். இந்தச் சமன்பாட்டில்,

N = மொத்த அலைவெண்கள்.

σ = கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் திட்டவிலக்கம்.

μ = கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி.

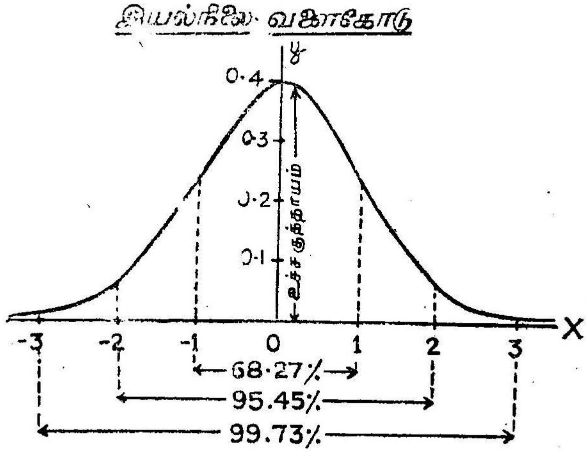
$\pi = 3.1416$

$e = 2.7183$

குறிப்பதற்கும், கணிப்பதற்கும் வசதியாக இருப்பதற்காக மொத்த அலைவெண்ணை Nஐ 1–க்கு சமமாக்கியும் (அதாவது, $N = 1$ எனக் கொண்டும்) $\sigma = 1$ எனவும், சார்பிலா மாறியான X–ன் மூலத்தை சராசரியில் எடுத்துக் கொண்டும் (அதாவது, $x = X - \mu$ எனவும் கொண்டும்) எழுதினால்,

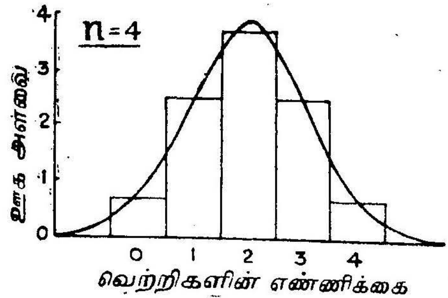
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ என்ற விரிவுக் கோவையைக் கொடுக்கும். இஃது இயல்நிலை வளைகோட்டின் பரப்பு ஒன்றாக வும், சராசரிச்சுழியாகவும், தர விலக்கம் ஒன்றாகவுமுள்ள பொது அமைப்பில் இருக்கும். மேலே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் வளைகோட்டின் உச்ச குத்தாயத்தை, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $(= .3989)$ குறிக்கும். x மாறியின் மதிப்பு + ஆனாலும், — ஆனாலும், அதற் கிணையான y-ன் மதிப்பில் மாற்றம் இருக்காது. எனவே, y அச்சிற்கு (உச்ச குத்தாயத்திற்கு) இரு மருங்கிலும் பரவல் சமச் சீராக அமைகிறது. உச்ச குத்தாயத்திற்கு இரு மருங்கிலும் எண்ணிலிவரை வளைகோடு நீள்கிறது. இந்த இயல்நிலை வளை

கோட்டின் பொது வடிவம் படம் 21-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு மாறி மேலே தரப்பட்ட சமன்பாட்டிற்குட்பட்ட அலை வெண்களைப்பெற்று $-\infty$-லிருந்து $+\infty$ வரை எந்தவொரு மதிப்பையும் பெறக் கூடியதாக அமைந்தால் அதனை இயல்நிலை மாறி எனச் சொல்கிறோம்.

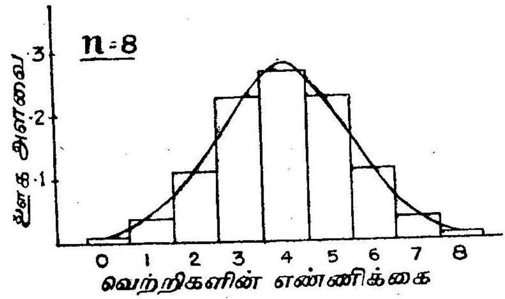


படம் 21.

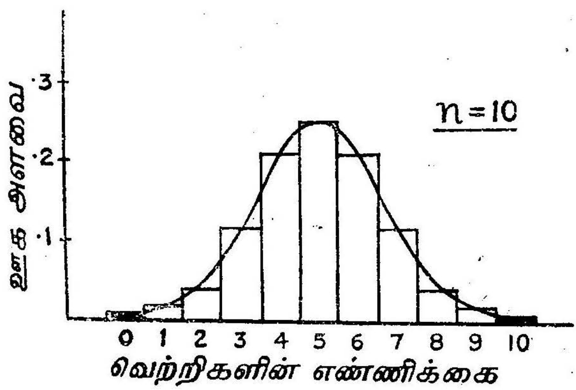
ஈருறுப்புப் பரவல் அணுகிச் செல்கின்ற வரம்பே இயல் நிலைப் பரவலாகும். ஈருறுப்புப் பரவலில் $p = q$ ஆக இருக்கும் போது நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை (n) அதிகரிக்கையிலும், $p \neq q$ ஆக இருக்கும்போது நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிலி (∞) ஆகும் போது பரவலுக்கான வளைகோடு ஓர் இழைந்த சமச்சீர் வளைகோடாக அணுகும். இதனைக் கீழ்க் கண்ட படங்கள் (படங்கள் 22, 23, 24) தெளிவு படுத்துகின்றன.



படம் 22.



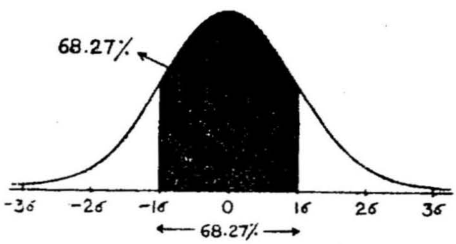
படம் 23.



படம் 24.

(1) இந்தப் பரவல் சமச்சீர் உடையதாகவும், தொடர்ச்சியுடையதாகவும் இருக்கும் (2) முகுடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுகின்றன (சமமாகும்). (3) $x = -3\sigma$, $x = +3\sigma$ ஆகியவற்றிலுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே 99.73% குறிப்புகளும், $x = -2\sigma$, $x = +2\sigma$ ஆகியவற்றிலுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே 95.45 சதவீத குறிப்புகளும், $x = -1\sigma$, $x = +1\sigma$ ஆகியவற்றிலுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே 68·27% குறிப்புகளும் அமைகின்றன (படம் 25). (4) இயல்நிலைப் பரவலின் கால்மான விலக்கம் $\frac{2}{3}\sigma$ ஆகும்; சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}\sigma$; ஒற்றைப்பட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பூச்சியமாகும்; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 3$.

இயல்நிலை வளைகோடு



படம் 25.

குத்தாய, பரப்புப் பட்டியல்கள்

இயல்நிலைப் பரவலைச் செயல் முறையில் பயன்படுத்துவதற்கு முன் கூட்டியே தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியல்கள் இருக்கின்றன. தரப்படுத்தப்பட்ட இயல்நிலை வளைகோடான,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ -ல்}$$

$x = 0, .01, .02 \ldots$ போன்ற மதிப்புகளுக்கு இணைந்த y மதிப்புகள் (குத்தாயங்கள்) ஒரு பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தப் பட்டியலுக்கு நிலைத்தூர அல்லது குத்தாயப் பட்டியல் (Table of ordinate) எனப் பெயராகும். இது போன்று சராசரியிலிருந்து குறிப்பிடப்பட்ட தூரங்களில் ($x = 0, .01, .02 \ldots$ போன்ற மதிப்புகளில்) நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பு (மொத்த பரப்புக்குள்ள வீதம்) மற்றொரு பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இது 'பரப்புப் பட்டியல்' (Area table) என வழங்கப்படும். குத்தாயங்களைவிடப் பட்டியலாக அமைக்கப்பட்ட பரப்புகள் நடைமுறையில் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல்களில் இவ் விருபட்டியல்களும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

பரப்புப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முறை

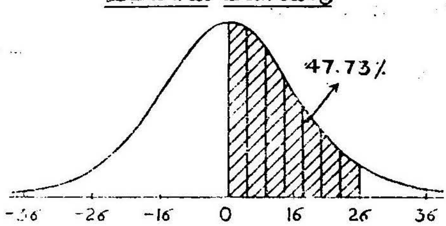
உச்ச நிலைக்கோட்டுக்கு இரு புறமும் இயல்நிலை வளைகோடு சமச்சீராக இருப்பதால், பரப்புப் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகள் சராசரிக்கு இரு புறமுள்ள (x, + ஆனாலும் அல்லது — ஆனாலும்) குறிப்புகளுக்கும் பயனாகும். உச்ச குத்தாயத்திற்கு (y அச்சிற்கு) வலப்புற மொத்தம் பரப்பு 0.5; இடப்

புற மொத்தப் பரப்பு 0.5 ஆகும். இந்தப் பட்டியலைப் பயன்படுத்து முன்னர்க் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பைச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் கண்டு (கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைக் கழித்து) கிடைத்த விலக்கத்தைத் திட்ட விலக்க அலகுகளால் மாற்ற வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு X எனில்,

$$x = \frac{X - \text{சராசரி}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$ ஐக் கணக்கிட வேண்டும். இதனை இயல்நிலை விலக்கம் (Normal deviate) எனக் கூறுகிறோம். இப்பொழுது x-ன் மதிப்பைத்தான் பட்டியலில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக் காட்டாக, இயல்நிலைப் பரவலில் உச்சக் குத்தாயத்திற்கும், சராசரியிலிருந்து $+2\sigma$ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்குமிடையே அடங்கும் குறிப்புகளின் வீதத்தைக் கணக்கிட, பரப்புப் பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ என்ற பத்தியில் 2·0 என்பதற்கு நேராக ·00 என்ற தலைப்பிட்ட பத்தியில், 0·4773 என்ற மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் குறித்துக்கொள்ள வேண்டும். இந்த மதிப்பை (வீதத்தினை) சதவீதமாக மாற்ற 100ஆல் பெருக்கினால் 47·73 சதவீதம் கிடைக்கும். எனவே, உச்ச குத்தாயத்திற்கும் சராசரியிலிருந்து $+2\sigma$ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்கும் இடையே 47·73 சதவீத குறிப்புகள் அடங்கும். படம் 26-ல் கோடிட்ட பகுதி இதனைக் குறிக்கும்.

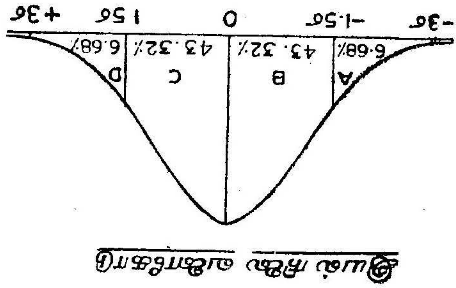
இயல்நிலை வளைகோடு



படம் 26.

சராசரியிலிருந்து $-1{\cdot}1\sigma$ தூரத்திலும் -2σ தூரத்திலும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே அமையும் குறிப்புகளைக் கணக்கிட, உச்ச குத்தாயத்திற்கும் சராசரியிலிருந்து $-1{\cdot}1\sigma$ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்கும் இடையே அடங்

கும் குறிப்புகளையும், உச்சக் குத்தாயத்திற்கும் சராசரியிலிருந்து -2σ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்கும் இடையே அடங்கும் குறிப்புகளையும் கண்டு இவற்றின் வேறுபாட்டினைக் காணவேண்டும். அதாவது படம் 27-ல் கண்டபடி (கோடிட்டப் பகுதி), -1.1σ-விருந்து $-2\sigma = (0$-விருந்து $-2\sigma) - (0$-விருந்து $-1{\cdot}1\sigma)$ பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ என்ற பத்தியில் 2·0 என்பதற்கு நேராக ·4773 என்ற மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது: 1·1 என்பதற்கு நேராக 0·3643 என்ற மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. எனவே $0{\cdot}4773 - 0{\cdot}3643 = 0{\cdot}1130$. ஆகவே, 11·30 சதவீதக் குறிப்புகள் அடங்கும்.



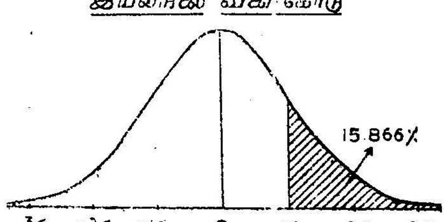
படம் 27.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1.

இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரியிலிருந்து (உச்ச குத்தாயத்திலிருந்து) $+1\sigma$ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விலக்கமடைகிற குறிப்புகள் எல்லாவற்றின் சதவீதங்களையும் காண்க.

சராசரியிலிருந்து $+1\sigma$ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்கு மேல் வளைகோட்டிற்குக் கீழ் விழும் குறிப்புகளைக் காணவேண்டும். படம் 28-ல் (கோடிட்ட பகுதி) $+1\sigma$-க்கு மேல்

இயல்நிலை வளைகோடு



படம் 28.

=0-க்கு மேல்—0-லிருந்து $+1\sigma$ வரை y அச்சுக்கு (உச்ச குத்தாயத்திற்கு) வலப்புற பரப்பு 0·5 ஆகும். அதாவது 0-க்கு மேல் பரப்பு 0·5 ஆகும்.

0-லிருந்து $+1\sigma$ வரை $=\frac{x}{\sigma}$ பத்தியில் 1·0 என்பதற்கு நேராக ·00 என்ற தலைப்பிட்ட பத்தியில், 0·34134 என்ற மதிப்பைக் காண்கிறோம்.

எனவே,

$+1\sigma$-க்குமேல் $= 0\cdot5 - 0\cdot34314$

$= 0\cdot15866$

எனவே, சராசரியிலிருந்து $+1\sigma$ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விலக்கமடையும் குறிப்புகளின் சதவீதம் $0\cdot15866 \times 100 = 15\cdot866$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2:

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 16; திட்ட விலக்கம் 4. 20-க்கும் 24-க்குமிடையே விழும் குறிப்புகளின் சதவீதத்தைக் காண்க.

இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி = 16

திட்ட விலக்கம் = 4.

$$\text{இயல்நிலை விலக்கம்} = \frac{X - \text{கூட்டுச் சராசரி}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

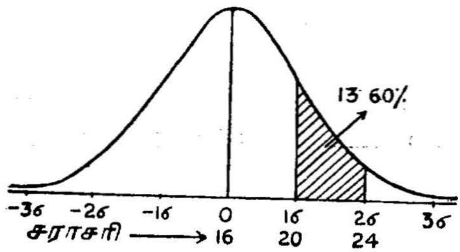
கொடுக்கப்பட மதிப்பு 20-க்கு

$$x = \frac{20-16}{4} = \tfrac{4}{4} = 1$$

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு 24-க்கு

$$= \frac{24-16}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

இயல்நிலை வளைகோடு



படம் 29.

படத்தில் (படம் 29-ல்) கண்டவாறு (கோடிட்ட பகுதி) சராசரியிலிருந்து $+1\sigma$ தூரத்திலும் $+2\sigma$ தூரத்திலும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே விழும் குறிப்புகளின் சதவீதத்தைக் காணவேண்டும்.

உச்ச குத்தாயத்திற்கும் $+1\sigma$–விலுள்ள குத்தாயத்திற்குமிடையே விழும் குறிப்புகள் = ·3413 (பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ பத்தியில் 1–க்கு நேராக)

உச்சக் குத்தாயத்திற்கும் $+2\sigma$–லுள்ள குத்தாயத்திற்குமிடையே விழும் குறிப்புகள் = ·4773 ($\frac{x}{\sigma}$ பத்தியில் 2–க்கு நேராக)

எனவே, $+1\sigma$-லுள்ள குத்தாயத்திற்கும் $+2\sigma$-லுள்ள குத்தாயத்திற்குமிடையே விழும் குறிப்புகள் =

$$= \cdot 4773 - \cdot 3413 = \cdot 1360$$

எனவே

20–க்கும் 24–க்குமிடையே விழும் குறிப்புகளின் சதவீதம்

$$= \cdot 1360 \times 100$$
$$= \underline{13 \cdot 60}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 3:

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 20; திட்ட விலக்கம் 5. எனில் (i) 22–க்கு மேல் எவ்வளவு சதவீதக் குறிப்புகள்

இருக்கும்? (ii) 25-க்குக் கீழ் எவ்வளவு சதவீதக் குறிப்புகள் விழும்?

(i) 22-க்கு மேல் வரும் குறிப்புகள்

X(கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு)=22

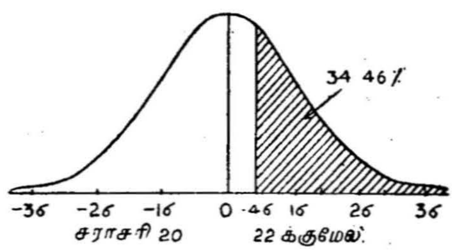
$$x = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$\mu = 20$$

$$\sigma = 5$$

$$x = \frac{22-20}{5} = \frac{2}{5} = 0{\cdot}4.$$

இயல்நிலை வளைகோடு



படம் 30.

படம் 30-ல் கண்டவாறு (கோடிட்ட பகுதி)

(x = ·4-க்கு மேல் விழும் குறிப்புகள், =

(x = 0-க்கு மேல்) − (x = 0-லிருந்து x = ·4 வரை)

= 0·5 − 0·1554

= 0·3446

∴ 22-க்கு மேல் விழும் குறிப்புகளின் சதவீதம்

= ·3446 × 100 = 34·46 ஆகும்.

(ii) 25-க்குக் கீழ் வரும் குறிப்புகள்.

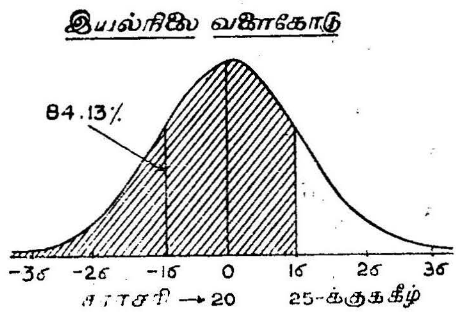
$$X = 25$$

$$x = \frac{25-20}{5} = \frac{5}{5} = +\,1{\cdot}0$$

(x = +1-க்குக் கீழ் விழும் குறிப்புகள்) =

(x=0-க்குக் கீழ்) + (x=0-லிருந்து x = +1 வரை)

படம் 31-ல் கோடிட்ட பகுதியாகும்



படம் 31.

0-க்குக் கீழ் (இடப்புற) பரப்பு = ·5

0-லிருந்து 1 வரை = ·3413 (பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ பத்தியில் 1-க்கு நேராக)

∴ +1-க்குக் கீழ் = ·5 + ·3413

= ·8413

+1-க்குக் கீழ் (அதாவது 25-க்குக் கீழ்) விழும் குறிப்புகளின் சதவீதம் = 84·13.

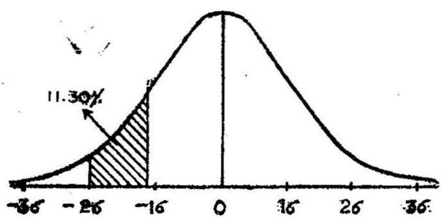
எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 4:

ஒரு நுழைவுச் சோதனை 200 மாணவர்களுக்கு நடத்தப்படுகிறது. அந்த மாணவர்களின் திறமையின் அடிப்படையில் அவர்கள் 4 குழுக்களாக (ஒவ்வொரு குழுவிலும் திறமையின் வீச்சு சமமாக இருக்குமாறு) பிரிக்கப்படுகின்றனர். சோதனையினால் அளக்கப்படும் பண்பு இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது எனக்கொண்டு, ஒவ்வொரு குழுவிலும் எத்தனை மாணவர்கள் இருக்கவேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

4 குழுக்களை A, B, C, D எனக் குறிப்பிடுக (A = குறிப்பிடத்தக்க திறமையுடைய, B = சராசரிக்கு மேல், C = சராசரிக்குக் கீழ், D = மட்டமான).

இயல்நிலை வளைகோட்டில் $x=-3\sigma$-லிருந்து $x=3\sigma$ வரை 99·73% குறிப்புகள் அடங்குமென அறிவோம். எனவே x-ன் வீச்சை (range) 4 சமபாகங்களாகப் பிரித்தால், ஒவ்வொரு குழுவிலும் எத்தனை சதவீத மாணவர்கள் இருக்கவேண்டுமென்பதை இயல்நிலைப் பரப்புப் பட்டியலின் துணைகொண்டு அறியலாம்.

இயல்நிலை வளைகோடு



படம் 32.

x-ன் வீச்சு $=3\sigma-(-3\sigma)=6\sigma$. 6σஐ 4 ஆல் வகுத்தால் $1·5\sigma$ கிடைக்கும்.

படத்தில் (படம் 32-ல்) கண்டவாறு ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் இயல்நிலை வளைகோட்டின் அடிதளத் தூரத்தில் $1·5\sigma$ பாகம் கிடைக்கும். உச்சக் குத்தாயத்திற்கும், சராசரியிலிருந்து (0-விருந்து) $1·5\sigma$ தூரத்தில் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயத்திற்குமிடையே அடங்கும் குறிப்புகள் (பரப்புப் பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ பத்தியில் 1·50 என்பதற்கு நேராக) ·4332 ஆகும். இதேபோல் $x=0$-வும் $x=-1·5\sigma$-வும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே விழும் குறிப்புகள் $=·4332$. அல்லது 43·32 சதவீதக் குறிப்புகள் அடங்கும்.

$x=-1·5\sigma$-வும் $x=-3\sigma$-வும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே விழும் குறிப்புகள்.

$=$ ($x=0$-க்குக் கீழ்)—x($=0$-லிருந்து, $x=-1·5\sigma$வரை)

$$= ·5 - ·4332$$

$$=0·0668$$

அல்லது 6.68 சதவீத குறிப்புகள் விழும்.

$x=+1.5\sigma$-வும், $x=+3\sigma$விலும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே அமையும் குறிப்புகள்,

$= (x = 0$க்கு மேல்$) - (x = 0$-விருந்து $x = 1.5\sigma$ வரை$)$

$= .5 \quad - \quad .4332$

$= .0668$

அல்லது 6.68 சதவீதம்.

கீழ்க்கண்ட பட்டியலில், ஒவ்வொரு குழுவிலும் எத்தனை பேர் இருக்க வேண்டும் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	குழுக்கள்			
	A	*B*	*C*	*D*
மொத்தத்தில் சதவீதம் (மொத்தம் 100 மாணவர்களிருந்தால்)	6.68	43.32	43.32	6.68
ஒவ்வொரு குழுவிலும் அடங்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (மொத்தம் 200 மாணவர்கள்.	13.36	86.64	86.64	13.36
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	13	87	87	13

A குழுவில் 13 மாணவர்களும், *B* குழுவில் 87 மாணவர்களும், *C* குழுவில் 87 மாணவர்களும், *D* குழுவில் 13 மாணவர்களும் இருக்கும்படியாக மாணவர்களைப் பிரிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 5:

அடியிற் கண்ட பரவலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக. எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காண்க.

உயரம் (அங்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
60 — 62	5
63 — 65	18
66 — 68	42
69 — 71	27
72 — 74	8
மொத்தம்	100

மேற்கண்ட பரவலின்

கூட்டுச் சராசரி (μ) = 67.45″

திட்ட விலக்கம் (σ) = 2.92″; N = 100.

எனவே, இயல்நிலை வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$y = \frac{100}{\sqrt{2\pi}\,2.92} e^{-\frac{(x-67.45)^2}{2\cdot(2.92)^2}}$$

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடும் முறை :

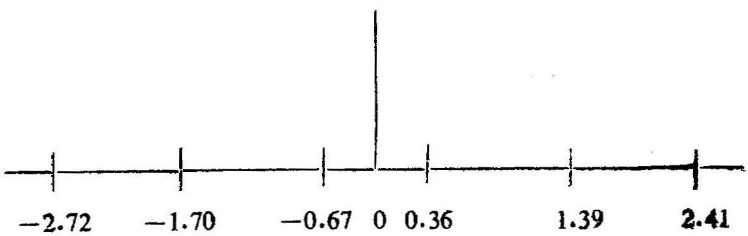
உயரம் (மெய்ப் பிரிவு) (1)	பிரிவின் மேல் எல்லை (X) (௨)	$X-\mu$ ($\mu = 67.45$) (3)	$\frac{X-\mu}{\sigma} = X$ ($\sigma = 2.92$) (4)	இயல்நிலை வளைகோட்டிற்குள் 0லிருந்து Xவரை அடங்கும் பரப்பு (5)	ஒவ்வொரு பிரிவின் பரப்பு (△) (௬)	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் $\Delta \times 100$ (7)
59.5	59.5	−7.95	−2.72	0.4967	.0413	.0413×100 =413
59.5−62.5	62.5	−4.95	−1.70	0.4554	.2068	20.68
62.5−65.5	65.5	−1.95	−0.67	0.2486	.3892	38.92
65.5−68.5	68.5	1.05	0.36	0.1406	.2771	27.71
68.5−71.5	71.5	4.05	1.39	0.4177	.0743	7.43
71.5−74.5	74.5	7.05	2.41	0.4920		

(1) கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளை மெய்ப் பிரிவுகளாக அமைத்துப் பட்டியலில் பத்தி 1-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மெய்ப் பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகள் பத்தி 2-ல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

(2) இரண்டாவது பத்திலிலுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் கூட்டுச் சராசரியான 67.45ஐக் கழித்து, பத்தி 3–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதாவது, ($X-$ 67.45) 3ஆம் பத்தியில்

கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மூன்றும் பத்தியிலுள்ள மதிப்புகளைத் திட்ட விலக்கத்தினால் (2·92 ஆல்) வகுத்து பத்தி 4-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதனை $x = \frac{X - 67.45}{2.92}$, அதாவது திட்ட மதிப்பு என்போம்.

(3) பத்தி 5-ல், 0-விருந்து x (= − 2.72, −1.70, − 0.67, 0.36, 1.39, 2.41) வரை இயல்நிலை வளைகோட்டிற்குள் அடங்கும் பரப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



$$X = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

இயல்நிலை வளைகோட்டிற்குள் 0–விருந்து − 2.72 வரை அடங்கும் பரப்பு = .4967 (இயல்நிலைப் பரப்பு பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ = 2.70 என்ற மதிப்புக்கு நேராக .02 தலைப்பிட்ட பத்தியில் 0.4967 என்ற மதிப்பைப் பார்க்கிறோம்·)

0-விருந்து − 1.70 வரை வளைகோட்டிற்குள் அடங்கும் பரப்பு = .4554 (பரப்பு பட்டியலில் 1.70–க்கு நேராக அமையும் மதிப்பு)

0-விருந்து − 0.67 வரை வளைகோட்டிற்குள் அடங்கும் பரப்பு = .2486

0–விருந்து .36 வரை வளைகோட்டிற்குள் அடங்கும் பரப்பு = .1406

0–விருந்து 1.39 வரை அடங்கும் பரப்பு = .4177

0-விருந்து 2.41 வரை அடங்கும் பரப்பு = 4920

(4) பத்தி 6-ல் பிரிவுகளின் (— 2·72-லிருந்து – 1.70 வரை, — 1.70-லிருந்து — 0 67 வரை, — 0.67-லிருந்து .36 வரை, .36-லிருந்து 1.39 வரை, 1.39–லிருந்து 2.41 வரை) பரப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

— 2.72-லிருந்து — 1.70 வரை வளைகோட்டிற்குள் அடங்கும் பரப்பு = (0-லிருந்து — 2-72 வரை) — (0–லிருந்து —1.70 வரை)

= .4967 — .4554

= .0413

—1.70–லிருந்து —0.67 வரை பரப்பு = (0-லிருந்து —1.70 வரை) — (0-லிருந்து —0.67 வரை)

= .4554 — .2486

= .2068

0.67–லிருந்து .36 வரை பரப்பு = (0-லிருந்து —.06 வரை) + (0–லிருந்து. 36 வரை)

= .2486 + .1406

= .3892

.36-லிருந்து 1.39 வரை பரப்பு = (0–லிருந்து 1.39 வரை) — (0-லிருந்து .36 வரை)

= .4177 — .1406

= .2771

1·39–லிருந்து 2·41 வரை பரப்பு = (0–லிருந்து 2·41 வரை) —(0-லிருந்து 1.30 வரை)

=·4920—·4177

=·0743.

(5) பத்தி 6-லுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பையும் மொத்த அலைவெண்ணால் (100ஆல்) பெருக்கினால், எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் கிடைக்கும்.

எனவே, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் (தோராயமாக):

4, 21, 39, 28, 7

கண்டறிந்த அலைவெண்கள்	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்
5	4
18	21
42	30
27	28
8	7

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 6 :

ஒரு சோதனையில் மதிப்பெண்களின் பரவல் இயல்நிலையாகும். 40 மதிப்பெண்களுக்குக் கீழ் பெற்றவர்கள் 21% ஆவர்; 60 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் பெற்றவர்கள் 23% ஆவர். எனவே, இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக.

40–க்குக் கீழ் வாங்கியவர் 21% எனில்,

$\mathbf{x}=\frac{40-\mu}{\sigma}$ முதல் $\mathbf{x}=0$ வரையில் உள்ள இயல்நிலைப் பரப்பு 0 5–0.21 = 0·29 ஆகும்.

பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து 0·29–க்குரிய **x**-ன் மதிப்பு–0·8068 ஆகும்.

$$\therefore -0{\cdot}8068=\frac{40-\mu}{\sigma}$$

அதாவது, $40-\mu=-0{\cdot}8068$

அல்லது, $\underline{40=\mu-0{\cdot}8068}$ ... ... (1)

60-க்கு மேல் வாங்கியவர் 23% எனில் $x=0$ முதல் $x=\frac{60-\mu}{\sigma}$ வரையில் உள்ள இயல்நிலைப் பரப்பு (0·5–0.23)=0·27 ஆகும். அதாவது, $\mathbf{x}=0$ முதல் $\mathbf{x}=\frac{60-\mu}{\sigma}$ வரையில் இயல்நிலைப் பரப்பு 0·27-க்குரிய **x**-ன் மதிப்பு (பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து) = 0·7398

$$\therefore \frac{60-\mu}{\sigma}={\cdot}7398$$

$$\mu+0{\cdot}7398\,\sigma=60 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) தீர்வு காண,

$\mu=50{\cdot}43;\quad \sigma=12{\cdot}{\cdot}3$

∴ கூட்டுச் சராசரி = 50·43; திட்ட விலக்கம் 12·93.

பயிற்சி 8

(1) 1000 மாணவர்கள் முதல், இரண்டாம், மூன்றும் வகுப்பு களில் தேறியதாகக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கூறுகிறது. பரவல் இயல் நிலையானதெனக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தினைக் காண்க. 45—53 மதிப்பெண்களைப் பெற்றவர்கள் 500 பேர்கள் எனக் காட்டுக.

வகுப்பு	மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
முதல் வகுப்பு	60-க்கு மேல்	50
2-வது வகுப்பு	50 — 60	350
3-வது வகுப்பு	50-க்குக் கீழ்	600
	மொத்தம்	1000

(2) இயல்நிலைப் பரவல் ஒன்றில் 45-க்குக் கீழ் 31% அம்சங் களும், 64-க்கு மேல் 8% அம்சங்களும் அமைந்து கிடந்தால், அதன் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க.

(3) பள்ளிக் குழந்தைகள் 1000 பேரின் நுண்ணறிவு ஈவு களின் கூட்டுச் சராசரி 96; திட்ட விலக்கம் 12. அது ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் அமைந்தால் 72-க்கு மேலேயும், 80–120 என்ற பிரிவிலும் அமையும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையினைக் காண்க.

(4) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக. கணக்கியல் அலைவெண்களையும் கணக்கிடுக.

x	6	8	10	12	14	16	18	20
f	7	15	24	35	43	38	20	10

(5) ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களில் 75% மாணவர்களை மேல் வகுப்பிற்கு (Pass) அனுப்ப ஓர் ஆசிரியர் தீர்மானிக்கிறார். பரீட்சை மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி 72; திட்ட விலக் கம் 6. பரீட்சை மதிப்பெண்கள் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. எனில், ஒரு மாணவன் மேல் வகுப்பிற்குச் செல்ல (தேர்வுக்குரிய) எத்தனை மதிப்பெண்கள் பெற்றிருக்கவேண்டும்?

(6) 1000 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 14·10; திட்ட விலக்கம் 2·50. சோதனை மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. எனில்,

(*a*) எத்தனை மாணவர்கள் 12-க்கும் 16-க்கும் இடையே மதிப்பெண்கள் பெறுகின்றனர்?

(*b*) 18-க்கு மேல் மதிப்பெண்களைப் பெற்றவர்கள் எவ்வளவு பேர்?

(*c*) 8-க்குக் கீழ் மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் எவ்வளவு பேர்?

(7) இயல்நிலைப் பரவலின் சில முக்கியப் பண்புகளைக் கூறுக.

9. நேர்கோட்டு உடன் தொடர்பும், மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கும்

(Linear Correlation and Regression)

1. நேர்கோட்டு உடன் தொடர்பு (Linear Correlation)

முந்திய அத்தியாயங்களில், ஒரு தனித்த மாறியின் தன்மையை அறியப் பயன்படும் புள்ளி விவர அளவைகளைக் கணிக்கும் முறைகளைக் கண்டோம். இப்பொழுது இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்போம். இரண்டு (அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட) பொருள்களுக்கிடையே அல்லது பண்புகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை அறிவதும், அவை எந்த அளவிற்கு ஒன்று மற்றொன்றுடன் மாறுபட்டுச் செல்கின்றது எனத் தெரிந்துகொள்வதும் பல சந்தர்ப்பங்களில் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவும், உளவியலிலும் மற்ற துறைகளிலும் பல வழிகளில் பயனுள்ளதாகவும் அமைகின்றன. ஒரு குழந்தையின் அறிவுத் திறனுக்கும், அந்தக் குழந்தையின் கல்வி சாதனைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பினையும், ஒரு தொழிலாளரின் இயற்கைத் திறனுக்கும், அந்தத்தொழிலாளர் ஒரு குறிப்பிட்ட தொழிலில் செலுத்தும் ஆர்வத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பினையும், முதிர்ந்தோரின் அறிவுத் திறனுக்கும், இளமைப் பருவத்தில் அவர்களது அறிவுத் திறனுக்கும் இடையேயுள்ள உறவினையும், இவை போன்று மற்ற பல பண்புகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவினையும், அவை எந்த அளவுக்கு உறவு கொண்டுள்ளன என்பதையும் உடன் தொடர்பு (Correlation) முறையினால் அறிய முடியும்.

அத்தகைய இரு பண்புகளை, x, y இரு மாறிகளாகக் குறிப்பிடுவோமாயின், x, y மாறிகளின் இடையுறவினை அல்லது உடன் தொடர்பினை அளப்பதற்கு உடன் தொடர்புக் கெழு

சிறந்த கருவியாக அமைகிறது. இந்தக் கெழு, மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு எந்த அளவுக்கு இருக்கிறது என்பதை எடுத்துக்காட்டும். இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினை நேர்கோட்டில் வர்ணித்தால், இந்தத் தொடர்பு 'நேர்கோட்டு உடன் தொடர்பு' என வழங்கப்படும். இந்த அத்தியாயத்தில் நேர்கோட்டுத் தொடர்பினையுடைய இரு மாறிகளைப்பற்றிக் கவனிப்போம்.

உடன் தொடர்புக் கெழுவின் (γ) மதிப்புக்கு —1-ம் +1-ம் எல்லைகளாகும். நடைமுறையில் கிடைக்கின்ற மதிப்புகள் இவ் வரம்புகளுக்கிடையே அமையும். r-ன் மதிப்பு +1ஆக இருப்பின், ஒன்றிய நேர்முக உடன் தொடர்பு எனவும், r-ன் மதிப்பு —1 எனில் ஒன்றிய எதிர்முக உடன் தொடர்பு எனவும் சொல்லப் படுகிறது. r-ன் மதிப்பு 0ஆக இருப்பின் இரு மாறிகளுக் கிடையேயுள்ள உறவு இன்மையை அது தெளிவுபடுத்தும்.

ஒரு மாறியின் உயர்ந்த மதிப்புகள் மற்றொரு மாறியின் உயர்ந்த மதிப்புகளோடு இணைகின்ற பொழுதும், ஒரு மாறியின் குறைந்த மதிப்புகள் மற்றொரு மாறியின் குறைந்த மதிப்புகளோடு இணைகின்ற பொழுதும் இந்த இரு மாறிகளின் இடையேயுள்ள தொடர்பு நேரானதாகும். இப்பொழுது r-ன் மதிப்பு நேரெண்ணாக இருக்கும்.

எடுத்துக் காட்டாக, ஐந்து மாணவர்கள் இரண்டு சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

மாணவர்கள்	சோதனை 1 (மதிப்பெண்கள்)	சோதனை 2 (மதிப்பெண்கள்)
அ	60	47
ஆ	62	49
இ	64	51
ஈ	66	53
உ	68	55

இந்த எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கில் r-ன் மதிப்பு +1ஆக இருக்கும். ஆகவே, சோதனை 1-க்கும் சோதனை 2-க்குமிடையேயுள்ள தொடர்பை 'ஒன்றிய நேர்முகத் தொடர்பு' என்கிறோம்.

ஒரு மாறியின் உயர்ந்த மதிப்புகள் மற்றொரு மாறியின் குறைந்த மதிப்புகளோடு இணையும்பொழுது தொடர்பு

எதிரிடையானதாகச் சொல்லப்படுகிறது. இங்கு r-ன் மதிப்பு குறையெண்ணாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக,

மாணவர்கள்	சோதனை I (மதிப்பெண்கள்)	சோதனை II (மதிப்பெண்கள்)
அ	25	80
ஆ	26	79
இ	27	78
ஈ	28	77
உ	29	76
ஊ	30	75

இங்கு r—ன் மதிப்பு 1ஆக இருக்கும். இப்போது சோதனை I-க்கும் சோதனை II—க்குமிடையேயுள்ள தொடர்பை ஒன்றிய எதிர்முகத் தொடர்பு என்கிறோம்.

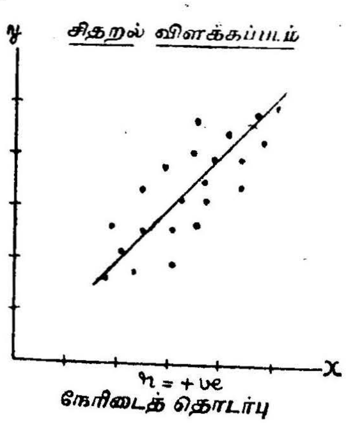
இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும் இணைந்து செல்லாமல் தனித் தனியே இயங்குகின்றபொழுது r—ன் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும். இஃது, இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இல்லையென்பதனையே உணர்த்துகிறது.

நேரான தொடர்பு மிகுந்து காணப்படும்போது r-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு அருகில் இருக்கும். எதிரிடைத் தொடர்பு அதிகமாகக் காணப்படும்போது r-ன் மதிப்பு 1-க்கு அருகில் இருக்கும். தொடர்பு குறைந்து காணப்படும்போது r-ன் மதிப்பு 0—க்கு அருகில் இருக்கும். எனவே, r-ன் மதிப்பிற்கேற்றவாறு இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினைக் கூறவேண்டும்.

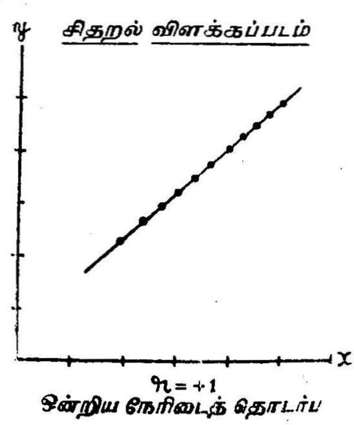
சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter diagram)

இரு மாறிகளின் பல்வேறு மெய்யான சோதனை மதிப்புகளையோ அல்லது அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அளக்க

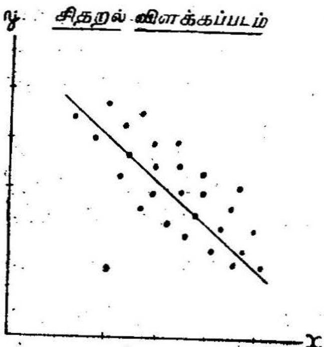
பட்ட விலக்க மதிப்புகளையோ ஒரு வரைப்படத்தில் புள்ளிகளாக அமைத்துப் பெறப்படும் படத்தைச் ‘சிதறல் விளக்கப் படம்’ என்கிறோம். இந்தப் படத்தில் புள்ளிகள் அமைந்த தன்மையினைக் கொண்டு இந்த இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவினைத் தோராயமாகக் கூறலாம். கொடுக்கப்பட்ட x, y என்ற இரு மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கருத்தில் கொண்டு, x-ன் மதிப்புகளை x அச்சிலும், y-ன் மதிப்புகளை y அச்சிலும் உற்ற பட அளவைகளில் எடுத்துக்கொண்டு x, y இரு மாறிகளின் சோடி மதிப்புகளைப் புள்ளிகளாக வரைதாளில் குறிக்கப் படவேண்டும். படம் 33 (a)-ல் காட்டியவாறு, குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் போக்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டினைச் சுற்றிச் சுழன்று அமைந்து கிடப்பின், x, y இரு மாறிகளுக்குள்ள நேர்முக உறவினை இது தெளிவுபடுத்தும். இப்போது r-ன் மதிப்பு நேரானதாக (+) இருக்கும். படம் 33 (b)-ல் குறிக்கப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு நேர்கோட்டின் மீது எல்லாப் புள்ளிகளும் அமைந்தால், ஒன்றிய நேர்முக உறவினை அது தெளிவுபடுத்தும். படம் 33 (c)-ல் காட்டியவாறு புள்ளிகள் அமைந்து கிடப்பின் எதிர்முக உறவினையும், படம் 33 (d)-ல் அமைந்தவாறு புள்ளிகள் அமைந்து கிடப்பின் ஒன்றிய எதிர்முக உறவினையும் அவை புலப்படுத்தும். படம் 33 (e)-ல் அமைந்தவாறு புள்ளிகள் விரிந்து பரந்து கிடந்தால், அது உறவின்மையைத் தெளிவுபடுத்தும்.



படம் 33 (a).

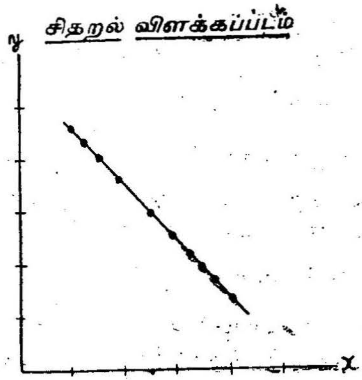


படம் 33 (b)



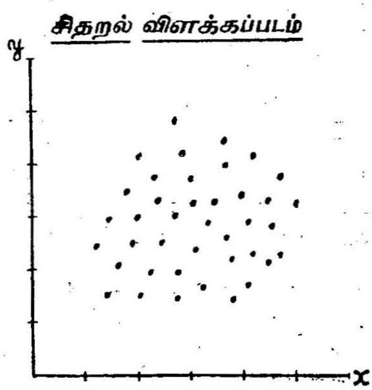
r = −ve
எதிரிடைத் தொடர்பு

படம் 33 (c).



r = −1
ஒன்றிய எதிரிடைத் தொடர்பு

படம் 33 (d).



r = 0
தொடர்பின்மை

படம் 33 (e).

சிதறல் விளக்கப் படங்களிலிருந்து, இரண்டு மாறிகளுக்கு மிடையே உறவு இருக்கிறதா, இல்லையா என்பதை அறியலாம். ஆனால், எந்த அளவுக்கு அவை தொடர்பு கொண்டுள்ளது என் பதைத் தெளிவாகக் கூறமுடியாது.

உடன் தொடர்புக் கெழு

இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை அளப்பதற்கு உடன் தொடர்புக் கெழு ஒரு சிறந்த கருவியாக அமைகிறது என்பதை ஏற்கெனவே குறிப்பிட்டிருந்தோம். x, y ஆகிய இரு

மாறிகளின் இணைவிலகலை அளப்பதைப்பற்றி இப்பொழுது கவனிப்போம். x மாறி அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அமையும் விலகலை, $\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2$ அளக்கும். இது போன்ற y மாறி அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அமையும் விலகலை, $\frac{1}{n}\sum(y-\bar{y})^2$ அளக்கும். x, y ஆகிய இரு மாறிகளின் இணைவிலகலை அல்லது உடன் மாறுபாட்டை (Covariation) அளக்கப் பெருக்க மொமென்டை $\left[\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})\right]$ அளவையாகக்கொள்ளலாம். ஆனால், x என்பது ஓர் அலகிலும், y என்பது பிறிதோர் அலகிலும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கலாம். எனவே, உடன் மாறுபாட்டை அளக்கப் பெருக்கு மொமென்டை அப்படியே பயன்படுத்தமுடியாது. ஆகையால், x, y-ன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே S_x, S_yஆல் வகுக்கப்பெறின், இது மூல அலகிலிருந்து விடுபட்டு தனித்த கெழுவாக அமையும். இப்பொழுது உடன் மாறுபாட்டை அளக்க இக் கெழுவைச் சிறந்த அளவையாகக் கொள்ளலாம். எனவே, உடன் தொடர்புக் கெழுவாக

$$r = \frac{(x, y\text{-ன் உடன் மாற்றம்})}{\sqrt{x\text{-ன் மாறுபாடு}}\ \sqrt{y\text{-ன் மாறுபாடு}}}$$

என்பதனைக் கொள்ளலாம். இதற்குப் 'பியர்சன் பெருக்க மொமென்டு உடன் தொடர்புக் கெழு' (Pearson's product moment Correlation Coefficient) எனப் பெயராகும்.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணிக்கப் பியர்சன் பெருக்க மொமென்டு வாய்பாடு

X_1, X_2, ... X_N என்பன X மாறியின் N மதிப்புகள் என்க; Y_1, Y_2. ... Y_N என்பன Y மாறியின், X-க்கு இணையான மதிப்புகள் என்க; எனில், உடன் தொடர்புக் கெழு

$$r = \frac{X, Y\text{-ன் உடன் மாற்றம்}}{\sqrt{(X\text{-ன் மாறுபாடு}) \times (Y\text{-ன் மாறுபாடு})}}$$

$$= \frac{\sum(X_i-\bar{X})\ (Y_i-\bar{Y})}{N\, S_x\, S_y}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\sum (X_i-\bar{X})\ (Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{N}}\ \sqrt{\frac{\sum (Y_i-\bar{Y})^2}{N}}}$$

$$= \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

rஐக் கணிக்க, நடைமுறையில் இதனை இன்னும் எளிய வடிவில் அடியிற் குறிப்பிட்டவாறு எழுதலாம்.

$$r = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{N}}{\sqrt{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}}\sqrt{\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{N}}}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

10 பள்ளி மாணவிகள் உளவியல் சோதனை *A*, *B*-ல் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. சோதனை *A*-க்கும் சோதனை *B*-க்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

சோதனை *A* (மதிப்பெண்கள்)	சோதனை *B* (மதிப்பெண்கள்)
5	1
10	6
5	2
11	8
12	5
4	1
3	4
2	6
7	5
1	2

கணிக்கும் முறை 1 :

சோதனை A (மதிப்பெண்) X_i	சோதனை B (மதிப்பெண்) Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i Y_i$
5	1	5×5=25	1×1=1	5×1=5
10	6	100	36	60
5	2	25	4	10
11	8	121	64	88
12	5	124	25	60
4	1	16	1	4
3	4	9	16	12
2	6	4	36	12
7	5	49	25	35
1	2	1	4	2
60	40	494	212	288
ΣX_i	ΣY_i	ΣX_i^2	ΣY_i^2	$\Sigma X_i Y_i$

$$r = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{N}}{\sqrt{\Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{N}} \sqrt{\Sigma Y_i^2 - \frac{(\Sigma Y_i)^2}{N}}}$$

$$= \frac{288 - \frac{40 \times 60}{10}}{\sqrt{\left[494 - \frac{(60)^2}{10}\right]} \sqrt{\left[212 - \frac{(40)^2}{10}\right]}}$$

$$= \frac{288 - 240}{\sqrt{(494-360)} \sqrt{(212-160)}} = \frac{48}{\sqrt{134 \times 52}}$$

$$= +0.58$$

கணிக்கும் முறை 2 :

X_i	Y_i	$(X_i-\bar{X})$	$(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X}_i)^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$	$(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$
5	1	$5-6=-1$	$1-4=-3$	$(-1)^2=1$	$(-3)^2=9$	$-1\times-3=3$
10	6	4	2	16	4	8
5	2	-1	-2	1	4	2
11	8	5	4	25	16	20
12	5	6	1	36	1	6
4	1	-2	-3	4	9	6
3	4	-3	0	9	0	0
2	6	-4	2	16	4	-8
7	5	1	1	1	1	$+1$
1	2	-5	-2	25	4	10
60	40	0	0	134	52	48
$\bar{X}=\frac{60}{10}=6$	$\bar{Y}=\frac{40}{10}=4.$			$\Sigma(X_i-\bar{X})^2$	$\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2$	$\Sigma(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$

$$r=\frac{\Sigma(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}\sqrt{\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

$$=\frac{48}{\sqrt{1\text{`}4}\ \sqrt{52}}=\frac{48}{\sqrt{134\times52}}$$

$$=\frac{48}{\sqrt{6968}}=+0.58$$

சோதனை A-க்கும், சோதனை B-க்கும் இடையே கணிசமான தொடர்புண்டு.

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக்காண குறுக்கு வழி

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போதும் இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் பெரியதாக இருக்கும்போதும் உடன் தொடர்புக் கெழுவை கணிக்க முந்திய பிரிவில் கொடுக்கப்பட்ட வாய்பாட்டைச் சற்று மாற்றத்துடன் ஏதாவது ஓர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களைக் கணக்கிட்டுக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாய்பாட்டினால் எளிதில் கணக்கிடலாம்.

$$= \frac{\sum dx.dy - \frac{\sum dx \sum dy}{N}}{\sqrt{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}} \sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

இங்கு $dx = X - A$

A என்பது எதாவது ஓர் எதேச்சை மூலம் (கொடுக்கப்பட்ட X மதிப்புகளில் எதாவது ஓர் மதிப்பாக இருக்கலாம்)

$$d_y = Y - B$$

B என்பது எதாவது ஓர் எதேச்சை மூலம் (கொடுக்கப்பட்ட Y மதிப்புகளில் எதாவது ஒன்றாக இருக்கலாம்.)

N என்பது Y, X-ன் மொத்த சோடி மதிப்புகள்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்கண்ட பட்டியலுக்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவை கணக்கிடுக.

சோடி	கணவனின் வயது (வருடத்தில்)	மனைவியின் வயது (வருடத்தில்)
1	30	27
2	30	31
3	29	25
4	29	25
5	28	26
6	28	25
7	27	24
8	27	23
9	26	24
10	26	25

கணவர்களின் வயதில் 28ஐ எதேச்சை மூலமாகவும், மனைவியரின் வயதில் 25ஐ எதேச்சை மூலமாகவும் எடுக்கலாம்.

கணவனின் வயது X	மனைவியின் வயது Y	$dx = X-28$	$dy = Y-25$	$dx^2 = (X-28)^2$	$dy^2 = (Y-25)^2$	$dx \times dy$ $(X-28)(Y-25)$
30	27	$30-28 = 2$	$27-25 = 2$	4	4	4
30	31	2	6	4	36	12
29	25	1	0	1	0	0
29	25	1	0	1	0	0
28	26	0	1	0	1	0
28	25	0	0	0	0	0
27	24	−1	−1	1	1	1
27	23	−1	−2	1	4	2
26	24	−2	−1	4	1	2
26	25	−2	0	4	0	0
மொத்தம்	...	0	5	20	47	21

$$\sum dx\, dy = 21$$

$$\sum dx^2 = 20$$

$$\sum dy^2 = 47$$

N = சோடிகளின் எண்ணிக்கை = 10

$$\therefore \quad r = \frac{\sum dx\, dy - \frac{\sum dx \sum dy}{N}}{\sqrt{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}}\sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

$$= \frac{21 - \frac{0\times 5}{10}}{\sqrt{20 - \frac{(0)^2}{10}}\ \sqrt{47 - \frac{(5)^2}{10}}}$$

$$= \frac{21}{\sqrt{20}\ \sqrt{47 - \frac{25}{10}}}$$

$$= \frac{21}{\sqrt{20}\ \sqrt{44\cdot 5}} = \frac{21}{\sqrt{20 \times 44\cdot 5}}$$

$$= \frac{21}{29\cdot 8}$$

$$= \cdot 705$$

$$r = 0\cdot 705.$$

கணவன், மனைவி வயதுகளுக்கிடையே நெருங்கிய (கணிசமான்) தொடர்புண்டு.

இரு மாறி அலைவுப் பரவல் (Bi.ariate frequency distribution)

குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது தொகுக்கப்படாத விவரங்களிலிருந்து உடன் தொடர்புக் கெழுவைக்கணிப்பதைவிட அவ் விவரங்களைத் தொகுத்து அலைவுப் பரவலாக அமைத்து உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுவது மிகவும் எளிது. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மதிப்புகளை அப்படியே வைத்துக் கொள்ளாமல் ஒவ்வொரு மாறிக்கும் தனித்தனியே பிரிவுகளைத் தொகுத்து மாறிகளின் மதிப்புகளை அதற்குரிய பிரிவுகளில் தரப்பட்டுப் பட்டியலாக அமைக்கவேண்டும். இந்தப் பட்டியலை 'இருமாறி அலைவுப் பட்டியல்' அல்லது 'உடன் தொடர்புப் பட்டியல்' எனக் கூறுவர். தனித்த ஒரு மாறியின் மதிப்புகளுக்கு அலைவுப் பட்டியல் அமைப்பதுபோல, x, y இரு மாறிகளின் மதிப்புகளுக்கும் அலைவுப் பட்டியல் அமைக்கவேண்டும். x-ன் மதிப்புகளை அதற்கிசைந்த y-ன் மதிப்புகளோடு இணைத்துத் தகுந்த பிரிவு இடைவெளிகளில் பரப்பும் விதத்தை 'இருமாறி அலைவுப் பரவல்' எனச் சொல்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

அடுத்த பக்கத்திற்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு மாறி அலைவுப் பட்டியல் அமைக்கவும்.

x முதல் சோதனை (மதிப்பெண்)	y இரண்டாவது சோதனை (மதிப்பெண்)
87	80
80	95
32	32
65	72
55	67
30	47

முதல் சோதனை (மதிப்பெண்) x	இரண்டாவது சோதனை (மதிப்பெண்) y	முதல் சோதனை (மதிப்பெண்) x	இரண்டாவது சோதனை (மதிப்பெண்) y
82	82	55	47
90	85	45	40
38	45	68	70
72	80	77	73
60	70	68	55
45	50	67	65
30	30	62	58
90	93	52	60
73	75	57	60
72	70	77	85
70	63	80	78
62	65		
85	90		

பட்டியல் அமைக்கும் முறை: (1) x-ன் (சோதனை *I*) மதிப்புகளுக்கும், y-ன் (சோதனை *II*) மதிப்புகளுக்கும் தனித்தனியாக ஏற்ற பிரிவுகளைத் தொகுத்து அமைக்கவும். அந்தப் பிரிவுகளை, பட்டியல் I-ல் (பக்கம் 172) அமைத்தவாறு எழுதவும். (2) x-ன் முதல் மதிப்பையும் y-ன் முதல் மதிப்பையும் சோடியாக எடுத்துக் கொண்டு, x-ன் முதல் மதிப்பான 87ஐ y-ன் முதல் மதிப்பான 80 உடன் இணைத்து, பட்டியலின் இரண்டாவது வரிசைக்கு (பிரிவு 80—89) நேராக, 6ஆவது பத்தியில் (பிரிவு 80—89) அமைந்த கட்டத்தில் ஒரு நேர்கோடு குறியிடவேண்டும். அடுத்து, x-ன் அடுத்த மதிப்பான 80ஐ y-ன் மதிப்பான 95 உடன் இணைத்து, இரண்டாவது வரிசைக்கு (பிரிவு 80—89) நேராக, 7ஆவது பத்தியில் (பிரிவு 90—99) உள்ள

இருமாறி அலைவுப்பட்டியல்

சோதனை *I* (*x*)-ன் மதிப்பெண்கள்

சோதனை II (*y*-ன்) மதிப்பெண்கள்	30—39	40—49	50—59	60—69	70—79	80—89	90—99
90—99						ǀǀ 2	ǀ 1
80—89					ǀǀ 2	ǀǀ 2	ǀ 1
70—79				ǀǀǀ 3	ǀǀǀ 3	ǀ 1	
60—69			ǀǀǀ 3	ǀǀ 2	ǀ 1		
50—59		ǀ 1		ǀǀ 2			
40—49	ǀǀ 2	ǀ 1	ǀ 1				
30—39	ǀǀ 2						
மொத்தம்	4	2	4	7	6	5	2

பட்டியல் I

கட்டத்தில் குறியிட வேண்டும். இவ்வாறு மற்ற *x*, *y*-ன் எல்லா மதிப்புகளை, சோடிகளாக எடுத்துக் கொண்டு தகுந்த கட்டங்களில் குறியிட வேண்டும். (3) பின்னர் அந்தந்தக் கட்டங்களிலுள்ள குறிகளின் எண்ணிக்கையை அந்தந்தக் கட்டங்களில் எழுதவேண்டும். கட்டத்திலுள்ள குறிகளின் எண்ணிக்கையை அந்தந்தக் கட்டத்தின் அலைவெண்கள் என்கிறோம். இருமாறி அலைவுப் பட்டியல் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு (இருமாறி அலைவுப் பரவலுக்கு) உடன் தொடர்புக் கெழு கணிக்கும் முறை

தொகுக்கப்படாத விவரங்களைத் தொகுத்து இருமாறி அலைவுப் பட்டியலாக அமைத்த பின்பு, உடன் தொடர்புக் கெழுவைக்

கணக்கிட அடியிற்கண்ட வாய்பாட்டை பயன் படுத்த வேண்டும்.

$$r = \frac{\Sigma fxy\,(dx)\,(dy) - \dfrac{(\Sigma fx\,dx)\,(\Sigma fy\,dy)}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma\, fy\, dx^2 - \dfrac{\Sigma\,(fx\,dx)^2}{N}\right]}\,\sqrt{\left[\Sigma\, fy\, dy^2 - \dfrac{(\Sigma\, fy\, dy)^2}{N}\right]}}$$

இங்கு

fx = x மாறியின் பிரிவு அலைவெண்

fy = y மாறியின் பிரிவு அலைவெண்

$dx = \left(\dfrac{x-A}{c}\right)$ என்பது A என்ற எதேச்சை மூலத்திலிருந்து x மாறியின் நடு மதிப்பு பெற்ற விலக்கம் பிரிவு இடைவெளி அலகில் (c)

$dy = \left(\dfrac{y-B}{c}\right)$ என்பது B என்ற எதேச்சை மூலத்திலிருந்து y மாறியின் பிரிவு நடு மதிப்பு பெற்ற விலக்கம் பிரிவு இடைவெளி அலகில் (c)

N = மொத்த சோடி மதிப்புகள் (அலைவெண்கள்)

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழே தரப்பட்ட இரு மாறி அலைவுப் பட்டியலுக்கு உடன்தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க.

x \ y	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
0–4	1	2			2
4–8		4	5	8	
8–12		1	3	4	
12–16		2		2	

y – மாறி பிரிவின் நடு மதிப்பு

x மாறி பிரிவின் நடு மதிப்பு

x \ y	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	மொத்தம் fx	$dx = \frac{x-6}{4}$	$fx . dx$	$fx . dx^2$	$f_{xy}\, dx\, dy$
2	[3] 1 3	[2] 2 4			[−1] 2 −2	5	−1	−5	5	5
6		[0] 4 0	[0] 5 0	[0] 8 0		17	0	0	0	0
10		[−2] 1 −2	[−1] 3 3	[0] 4 0		8	1	8	8	−5
14		[−4] 2 −8		[0] 2 0	[2] 1 2	5	2	10	10	−6
மொத்தம் fy	1	9	8	14	3	35 $\Sigma fx = \Sigma fy$		13 $\Sigma fx\, dx$	13 $\Sigma fx\, dx^2$	−6 $\Sigma f_{xy}\, dx\, dy$
$dy = \frac{y-1.75}{5}$	−3	−2	−1	0	1					
$fy\,dy$	−3	−18	−8	0	3	−26 $\Sigma fy\, dy$				
$fy\, dy^2$	9	36	8	0	3	56 $\Sigma fy\, d^2y$				
$f_{xy}\, dx\, dy$	8	−6	−3	0	0	−6 $\Sigma f_{xy}\, dx\, dy$				

$$r = \frac{\sum f_{xy}\, dx\, dy - \frac{(\Sigma fx\, dx)\ (\sum fy\, dy)}{N}}{\sqrt{\left[\sum fx\, dx^2 - \frac{(\Sigma fx\, dx)^2}{N}\right]\left[\sum fy\, dy^2 - \frac{(\sum fy\, dy)^2}{N}\right]}}$$

$$= \frac{-6 - \frac{13 \times -26}{35}}{\sqrt{\left[33 - \frac{(13)^2}{35}\right]\left[56 - \frac{(-26)^2}{35}\right]}}$$

$$= \frac{-6 - \frac{-338}{35}}{\sqrt{33 - \frac{169}{35}}\sqrt{56 - \frac{676}{35}}}$$

$$= \frac{-6 - (9.66)}{\sqrt{33 - 4.83}\ \sqrt{56 - 19.31}}$$

$$= \frac{3.66}{\sqrt{28.17}\ \sqrt{36.69}}$$

$$= \frac{3.66}{5.3 \times 6.1}$$

$$= \frac{3.66}{32.33} = 0.11$$

$$\therefore r = 0.11$$

மேற்கண்ட பட்டியல் அமைக்கும் முறை :

(1) x மாறியின் பிரிவு நடு மதிப்புகளையும், y மாறியின் பிரிவு நடு மதிப்புகளையும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

(2) x மாறிக்கு 6ஐ எதேச்சை மூலமாகவும், y மாறிக்கு 17.5ஐ எதேச்சை மூலமாகவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இந்த மூலங்களிலிருந்து விலக்கங்கள் பிரிவு இடைவெளி அலகுகளில், அதாவது, $dx = \frac{x - 6}{4}$, $dy = \frac{y - 17.5}{6}$ என குறிக்கப்படுகின்றன.

(3) குறுக்கு வழியில் கூட்டுச் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் கணக்கிடும் முறையைப் போல $\sum fx\, dx$, $\sum fy\, dy$, $\Sigma fx\, dx^2$, $\Sigma fy\, dy^2$ ஆகியவற்றைக் கணிக்க வேண்டும்.

(4) $\sum fxy\ dx\ dy$ஐக் கணிக்க, பட்டியலில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் மூன்று எண்கள் உள்ளதைக் கவனிக்க வேண்டும். இதில் நடு எண் அந்தக் கட்டத்திலுள்ள குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை (கட்ட அலைவெண்) ஆகும். இடதுபுற மேல் கோடியில் அடைப்புக் குறியிலுள்ள எண், அந்தக் கட்டம் அமைந்த வரிசையிலுள்ள dx-ன் மதிப்பையும், பத்தியிலுள்ள dy-ன் மதிப்பையும் பெருக்கிக் கிடைத்த பெருக்குத் தொகையாகும். முதல் வரிசை, முதல் பத்தி கட்டத்தின் அடைப்புக் குறியிலுள்ள 3 (-1×-3), அந்த வரிசையிலுள்ள dx-ன் மதிப்பு—1ஐயும், அந்த பத்தியிலுள்ள dy-ன் மதிப்பு -3ஐயும் பெருக்கிக் கிடைத்த மதிப்பாகும். வலது புற கீழ்க் கோடியிலுள்ள எண், அந்தக் கட்டத்திலுள்ள அலை வெண்ணையும், அந்த கட்டத்தில் அடைப்புக் குறியிலுள்ள எண்ணையும் பெருக்கிய பெருக்குத் தொகையாகும். இவ்வாறு எல்லாக் கட்டங்களிலும் குறிக்கவும். ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் வலதுபுற கீழ்க் கோடியிலுள்ள எண்களை இயற் கணித ரீதியில் ஒவ்வொரு வரிசைக்கும், ஒவ்வொரு பத்திக்கும் கூட்டிப் பட்டியலில், முறையே வலப்புறக் கோடியிலுள்ள $f_{xy}\ dx\ dy$ என்ற பத்தியிலும், அடியிலுள்ள $f_{xy}\ dx\ dy$ என்ற வரிசையிலும் குறிக்க வேண்டும். பட்டியலில், $f_{xy}\ dx\ dy$ என்ற பத்தியின் கூட்டல் தொகை (-6)-ம், $f_{xy}\ dx\ dy$ என்ற வரிசையின் கூட்டல் தொகை (-6)-ம் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

2. மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு (Regression)

சிதறல் விளக்கப் படத்தை நாம் கவனிப்போமானால், புள்ளிகள் ஒருவகை நேர்கோட்டினைச் சுற்றி சுழன்றிருக்கின்ற தன்மையினை அறியலாம். x, y என்ற இரண்டு மாறிகளில் xஐச் சார்பிலா மாறியாகவும் (Independent variable) yஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் (Dependent variable) கொண்டால், x, y-களுக்குள்ள தொடர்பினை $y = a + bx$ என்ற வடிவில் மிகவும் ஏற்புடைய ஒருவகை நேர்கோட்டின் மூலம் பொருத்திக் காட்டலாம். இதே போல், yஐச் சார்பிலா மாறியாகவும், xஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டால், பொருத்தக் கூடிய மிகச் சிறந்த நேர்கோட்டினை $x = c + dy$ என்ற வடிவில் பெறலாம். இந் நேர்கோடுகளைச் சுற்றித்தான் புள்ளிகள் அமைந்து கிடைக்கும். எனவே, இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே யுள்ள சராசரி தொடர்பைக் குறிக்கும் இவ்விரு நேர்கோடுகளை, 'மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு நேர் கோடுகள்' (Linear Regression lines) என்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறியின் மதிப்பிற்கு இணையான மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை முன்கூற தொடர்புப் போக்குச்

சமன்பாடுகளை (Regression equations) பயன்படுத்தலாம். முன் கூற்று அல்லது முன் கணிப்பு, உளவியலில் எல்லாப் பிரிவுகளி லும், அதாவது உளநோய் உளவியல், கல்வி உளவியல், தொழிற் சம்பந்தமான உளவியல் போன்றவற்றில் மிகவும் பயனுள்ளதாக அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குழந்தை யின் நுண்ணறிவைக் கொண்டு (நுண்ணறிவுச் சோதனையிலி ருந்து) அந்தக் குழந்தையின் படிப்பு நாட்டத்தையும், இயற் கைத் திறன் சோதனைகளிலிருந்து ஒரு தொழிலுக்கான ஒருவ ருடைய தகுதியையும், தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, முன் கூறலாம்.

சிதறல் விளக்கப் படத்திலிருந்து ஒரு மாறியின் மதிப்பை முன்கூற முடிந்தாலும், இந்த முறை ஒரு திருத்தமான முறையாகாது. இந்த முறையில் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்கும் போது மதிப்பீடுகளில் அதிக பிழை இருக்கலாம். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட (உண்மையான) மதிப்பிற்கும், சிதறல் விளக் கப் படத்திலிருந்து கண்டறிந்த மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாடு அதிகமாக இருக்கலாம்.

இரு மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காணல்

x, y ஆகிய இரு மாறிகளும் இணைந்து மாற்றமடையும் தன் மையினை நன்கு வரையறை செய்யக்கூடிய மிகவும் பொருத்த மான (least) நேர்கோட்டைக் காண குறைந்த வர்க்க (Least square) முறையினைக் மேற்கொள்ளலாம். அதாவது, $y=a+bx$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் a, b என்ற இரு மாறிலி களுக்கு (Constants) மிகச் சிறந்த மதிப்பைக் குறைந்த வர்க்க முறையில் காண வேண்டும். இம் முறையில் a-க்கும் b-க்கும் மதிப் பைக் கண்டறிந்தபின்னர் கொடுக்கப்பட்ட x மதிப்புகளுக்கேற்ப y மதிப்புகளைக் (இதனை எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகள் என்கிறோம்) கண்டு, அதனைக் கண்டறிந்த (கொடுக்கப்பட்ட) y மதிப்பு களோடு ஒப்பிடலாம். இது ஒரு திருத்தமான முறையாகும்.

$y=a+bx$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு a, b என்ற மாறிலிகளின் மதிப்பைக் குறைந்த வர்க்க முறையில் காணும் முறையை இப்போது காண்போம்.

பொருத்தப்படக் கூடிய மிகச் சிறந்த நேர்கோடு

$$y = a + bx \qquad \text{...} \qquad (1)$$

$$\Sigma y = \Sigma a + b\Sigma x$$

$$n\bar{y} = na + bn\bar{x} \quad \left(\because \frac{\Sigma x}{n} = \bar{x};\ \frac{\Sigma y}{n} = \bar{y} \right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

இங்கு n என்பது (சோடி) மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

(2)ஐ $\bar{y} = a + b\bar{x}$ என எழுதலாம் (தொடர்புப் போக்கு கோடு $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியாகச் செல்கிறது என்பதை இது காட்டுகிறது).

(1)ஐ xஆல் பெருக்க

$$xy = ax + bx^2$$

(அதாவது) $\Sigma xy = a\Sigma x + b\,\Sigma x^2$

(அதாவது) $\Sigma xy = an\bar{x} + b\Sigma x^2$ ...... (3)

சமன்பாடுகள் (3)—ம் (2)—ம், அதாவது

$$\left. \begin{aligned} \Sigma xy &= an\bar{x} + b\Sigma x^2 \\ n\bar{y} &= na + bn\bar{x} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

ஆகியவற்றை மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் என்கிறோம். இவற்றிலிருந்து a, b-யைத் தீர்மானிக்கலாம்.

(4)ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma xy &= an\bar{x} + b\Sigma x^2 \\ n\bar{x}\bar{y} &= an\bar{x} + bn\bar{x}^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

(5)-க்குத் தீர்வு கண்டால்

$$\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y} = b\Sigma x^2 - bn\bar{x}^2$$

$$= b(\Sigma x^2 - n\bar{x}^2)$$

$$\therefore \quad b = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}$$

a-ன் மதிப்பைக் காண சமன்பாடு (2)ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$n\bar{y} = na + b\bar{x}$$

அல்லது $\bar{y} = a + b\bar{x}$

$$\therefore \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

a-ன் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1)

அதாவது, $y = a+bx$-ல் எழுதினல்

$$y = (\bar{y}-b\bar{x})+bx$$

$$(y-\bar{y}) = -b\bar{x}+bx = bx-b\bar{x}$$

$$= b(x-\bar{x})$$

$$\therefore \quad (y-\bar{y}) = b(x-\bar{x})$$

இதில்,

$$b = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x^2 - nx^2} = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{nS^2x} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

இங்கு $Sx^2 = \frac{1}{n}[\Sigma x^2 - n\bar{x}^2]$

இப்போது, உடன்தொடர்புக் கெழு

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\, S_x\, S_y}$$

அல்லது, $r.\ n.\ S_x.\ S_y = \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \Sigma xy - nxy$

$= b\ n\ S^2x$ [(6)-லிருந்து]

$$\therefore \quad b = \frac{r.\ n\ S_x\ S_y}{nS_x^2}$$

$$= \frac{r\, S_y}{S_x}$$

இப்போது,

$y-\bar{y} = b\ (x-\bar{x})$ என்பது

$(y-\bar{y}) = \frac{r\, S_y}{S_x}(x-\bar{x})$ எனவாகும்.

இதில்

$\bar{y}$ என்பது y மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$\bar{x}$,, x ,, ,,

S_y ,, y மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம்

S_x ,, x ,, ,,

r ,, x-க்கும் y-க்குமுள்ள உடன் தொடர்புக்கெழு.

எனவே, x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$(y-\bar{y}) = \frac{r\,S_y}{S_x}(x-\bar{x}) \qquad \ldots\ldots \quad (A)$$

இதுபோன்று, $x = C+dy$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

y-ன் மேல் x-ன் தொடர்பு போக்குச் சமன்பாடு

$$(x-\bar{x}) = \frac{r\,S_x}{S_y}(y-\bar{y}) \qquad \ldots\ldots \quad (B)$$

$\frac{r\,S_y}{S_x}$ என்பது x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புப் போக்குக்கெழு எனவும்,

$\frac{r\,S_x}{S_y}$ என்பது y-ன் மேல் x-ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு எனவும் வழங்கப்படுகின்றன.

கொடுக்கப்பட்ட x, y இரு மாறிகளின் சோடி மதிப்புகளுக்கு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை காணும்பொழுது சார்பிலா x மாறிக்கும் சார்ந்த y மாறிக்கும் உள்ள தொடர்பை $y=b+bx$ (x-ன் மேல் y) என்ற சமன்பாடும், சார்ந்த x மாறிக்கும் சார்பிலா y மாறிக்குமுள்ள தொடர்பை $x=C+dy$ (y-ன்மேல் x) என்ற சமன்பாடும் தெளிவுபடுத்துகின்றது. ஒரு மாறியின் ஓர் அலகு மாற்றத்திற்கு மற்றொரு மாறியில் ஏற்படும் சராசரி மாற்றங்களை இந்தச் சமன்பாடுகள் காட்டுகின்றன.

இரு மாறிகளின் தொடர்புப்போக்கு நேர்கோடுகளின் பயன்கள்

ஒரு மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் மற்றொரு மாறியின் சிறந்த மதிப்பினை முன் கூறவும், இரு மாறிகளுக்குமிடையே யுள்ள தொடர்பினை வர்ணிக்கவும் இக் கோடுகள் பயன்படுகின்றன. இரு மாறியின் மதிப்பை முன் கூறும்போது x-ன் மதிப்பு (சார்பிலா மாறி) கொடுக்கப்பட்டு அதற்கு இணையான y-ன் மதிப்பைச் (சார்ந்த மாறி) காண x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புப் போக்கு நேர்கோட்டையும், [அதாவது (A)ஐ] அதாவது

$$(y-\bar{y}) = \frac{r\,S_y}{S_x}(x-\bar{x}) \text{ஐயும்,}$$

y-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு அதற்கு இணையான x-ன் மதிப்பைக் காண, y-ன் மேல் x-ன் தொடர்பு போக்குக் கோட்டினை [அதாவது (B)ஐ] அதாவது,

$$(x-\bar{x}) = r\frac{S_x}{S_y}(y-\bar{y})$$ ஐயும்

பயன்படுத்த வேண்டும். ஆகவே, இரு மாறிகளின் தொடர்பு போக்குச் சமன்பாட்டில் x, y இரு மாறிகளும் உட்பட்டிருந்தாலும் ஒரு சமன்பாட்டை மற்றொன்றுக்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தக் கூடாது.

ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களின் ஒவ்வொருவரின் உயரமும், பருமனும் தெரிந்திருக்கும்போது அந்தக் குழுவில் ஒருவரின் உயரத்தையோ அல்லது பருமனையோ தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து முன்கூறுவதென்பது தேவையற்றதாக இருக்கலாம். ஆனால், ஒருவரின் உயரமோ அல்லது பருமனோ தெரியாமலிருக்கும்போது தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து அதனை எவ்வாறு மதிப்பிட இயலும் என்பதைக் கவனிப்போம். ஒரு குறிப்பிட்ட வயதுப் பிரிவில் 120 பேர் கொண்ட, ஒரு குழுவிலுள்ளவர்களின் உயரத்திற்கும் பருமனுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அதே வயது பிரிவில் அடங்கும், அந்தக் குழுவில் இல்லாத வேறொருவரின் உயரத்தையோ அல்லது பருமனையோ இரு மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து மதிப்பிடலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்த மாதிரியில் அடங்கும் நபர்களின் உயரத்திற்கும், பருமனுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு தெரிந்திருக்குமேயாயின், தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து அந்த முழுமைத் தொகுதியில் அடங்கும் ஒருவரின் உயரத்தை அல்லது பருமனை முன் கூறலாம். ஆனால், 30-லிருந்து 40 வயதையுடைய சிலரின் பருமனுக்கும் உயரத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை விவரிக்கும் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து குழந்தைகளின் உயரத்தையோ அல்லது பருமனையோ மதிப்பிடக்கூடாது.

உளவியல் சோதனைகளில், மதிப்பீடு மிகவும் பயனுள்ளதாக அமைகிறது. எடுத்துக் காட்டாக, புதிதாகச் சேர்ந்த 400 பள்ளி மாணவர்களுக்கு ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சாதனைச் சோதனைகள் தொகுதிக்கும், ஒவ்வொரு மாணவனும் அந்த ஆண்டில் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மறு ஆண்டுத்

தொடக்கத்தில் அதே சோதனைத் தொகுதியைப் புதிய மாண வர்களுக்குக் கொடுத்து, முந்திய ஆண்டில் அமைத்த தொடர் புப் போக்குச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, புது மாணவர் களின் படிப்புச் சாதனையை முன் கூறலாம். எனவே, தகுந்த கல்விக்காக மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவும், தொழிற்சாலைக் குத் தகுந்த தொழிலாலர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவும், பலவகை உத்தியோகங்களுக்கு ஏற்ற நபர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவும், மற்றும் பல வழிகளிலும் மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குச் சமன் பாடுகள் பயன்படுகின்றன.

3. மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை (Standard error of the estimate)

மாறிகளின் தொடர்புப்போக்குக் கோட்டிலிருந்து சார்பிலா மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது சார்ந்த மாறி யின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கிறோம். இவ்வாறு தீர்மானிக்கப் பட்ட மதிப்பிற்கும், அந்தச் சார்ந்த மாறியின் கொடுக்கப்பட்ட (மெய்யான) மதிப்பிற்கும் வேறுபாடு இருக்கலாம். இவ்வாறு செய்யப்படும் மதிப்பீடுகள் எந்த அளவுக்குத் திருத்தமுடையன என்பதை அளக்கும் அளவையாக மதிப்பீடு திட்டப்பிழை அமைந்திருக்கும். அதாவது தொடர்புச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பீடுகளின் ஏற்புடைமையை அளக்க திட்டப்பிழை உதவுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு x மதிப் பிற்கும், அதன் சரியான y மதிப்பைத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறவேண்டும். பிறகு, அந்த மதிப்புகளுக் கும் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்குமுள்ள வித்தியாசங்களைக் கணக் கிட்டு அவற்றின் வர்க்கங்களின் சராசரிக்கு வர்க்கமூலம் கண்டு பிடித்தால், அதுவே திட்டப்பிழையாகும்.

x-மாறி மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டு அதற்கிசைந்த y மாறி யின் மதிப்பை x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புக்கோட்டிலிருந்து மதிப்பீடு செய்யும்போது, y மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை

S (y மதிப்பீடு) $= \sqrt{\dfrac{\sum (y-y')^2}{n}}$ ஆகும். இந்தச் சூத்திரத்தில்

—y' என்பது தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து (x-ன் மேல் y) கண்டறிந்த y-ன் மதிப்பு. n என்பது y மதிப்பு களின் எண்ணிக்கை.

y மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழையை அடுத்த பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டவாறும் எழுதலாம்.

$$S_{(y\ \text{மதிப்பீடு})} = S_y \sqrt{(1 - r^2)}$$

இதில்

S_y என்பது y மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கம் .

r ,, x-க்கும் y-க்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு.

இதுபோன்று,

x மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழைச் சூத்திரம்

$$S_{(x\ \text{மதிப்பீடு})} = \sqrt{\frac{\sum (x - x')^2}{n}}$$

இதில்,

x^1 என்பது, y-ன் மேல் x தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டறிந்த x-ன் மதிப்பு. n என்பது x மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

x மதிப்பீட்டின் திட்டப் பிழையை அடியிற் கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$$S_{(x\ \text{மதிப்பீடு})} = S_x \sqrt{1 - r^2}$$

இதில்

S_x என்பது x மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம்

r என்பது x-க்கும் y-க்குமுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு.

(y அல்லது) x-ன் மதிப்பிலிருந்து (x) y-ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கும் போது மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை 0ஆக இருப்பின், (x) y-ன் மதிப்பீடு மிகவும் திருத்தமாக அமைகிறது. திட்டப்பிழையின் மதிப்பு 0 எனில், r-ன் மதிப்பு ஒன்றாகும். r-ன் மதிப்பு ஒன்றிலிருந்து 0-க்குக் குறையும் போது திட்டப் பிழையின் மதிப்பு பெரிதும் அதிகரிக்கிறது. திட்டப்பிழையின் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க மதிப்பீட்டின் நம்பகம் குறையும்.

மாறிகளின் தொடர்புப்போக்குச் சமன்பாட்டு மூலமாக முன் கூறும்போது மூன்று அனுமானங்களைக் கொள்கிறோம். (1) இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டில் அமையவேண்டும். (2) இரு மாறிகளின் பரவல்களும் இயல் நிலையாகவோ அல்லது தோராயமாக இயல் நிலையாகவோ இருக்கவேண்டும். (3) இருமாறி பரவலில் y-மாறி, x-மாறி மதிப்புகளின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் விவரங்களின் சிதறல் சீராக அமைந்திருத்தல் வேண்டும். இம் மூன்று அனுமானங்களின் அடிப்படையில் பெறும் மதிப்பீடுகள் திருத்தமாகவும், நம்பக மானதாகவும் இருக்கின்றன இந்த அனுமானங்கள் திருப்தி யடையாத நிலையில், தொடர்புப்போக்குச் சமன்பாடும், மதிப் பீட்டின் திட்டப்பிழையும் சரியான, திருத்தமான செய்தியைத் தராது.

4. உடன் தொடர்புக் கெழுவை விவரித்தல்

நமது பரிசோதனையின் நோக்கத்தையும், உடன் தொடர் புக் கெழு எந்த நிலைமையின் அடிப்படையில் பெறப்பட்டது என்பதையும் கருத்தில் கொண்டு பொதுவாக உடன் தொடர் புக் கெழு விவரிக்கப்படுகிறது. குறிப்பாக உளவியல், கல்வி யியல் சோதனைகளில் இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை விவரிக்கும்போது, கீழே தரப்பட்ட பாகுபாடு மேற்கொள்ளப்படுகிறது. r-ன் மதிப்பு 0-விருந்து $\pm.2$-க்குள் விழுந்தால், அது மிகவும் குறைந்த அற்பமான தொடர்பினையும் r-ன் மதிப்பு $\pm{\cdot}2$ விருந்து $\pm{\cdot}4$ க்குள் இருந்தால், அது குறைந்த ஆனால் சொற்ப தொடர்புண்டு என்பதையும், r-ன் மதிப்பு $\pm{\cdot}4$ விருந்து $\pm{\cdot}7$-க்குள் இருந்தால் அது குறிப்பிடத்தக்க, கணிச மான தொடர்பினையும், r-ன் மதிப்பு $\pm{\cdot}7$-விருந்து ± 1 வரை இருப்பின், அது மிக உயர்ந்த தொடர்பிலிருந்து நிறைவுடைய தொடர்பையும் எடுத்துக்காட்டும்.

மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை பூச்சியமாக இருக்கும்போது அதாவது தொடர் நேர்கோட்டையொட்டிச் சிதறல் இல்லையா யின், r-ன் மதிப்பு ± 1 என்பதை அறியலாம். இது இரு மாறி களிடையே நிறைவுடைய உறவைக்காட்டும். மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழையின் உச்சமதிப்பு சார்ந்த மாறியின் திட்டவிலக்கத் திற்குச் சமமாக இருந்தால் (முன் கூற்று திருத்தமாக அமையாத நிலையில்), r-ன் மதிப்பு பூஜ்யமாகும். அஃது இரு மாறிகளுக் கிடையே தொடர்பு இல்லை என்பதையே உணர்த்துகிறது.

முன்கூற்றில் r-ன் திறமுடைமையை அளக்க

$E = 1-\sqrt{1-r^2}$, என்ற கெழுவைப் பயன்படுத்தலாம். இதனை முன்கூற்றுத் திறமுடையக் கெழு (Coefficient of forecasting efficiency) எனக் கூறுவர். எடுத்துக்காட்டாக, இயற்கைத் திறன் சோதனைத் தொகுதிக்கும், ஒரு திட்டமான சோதனைக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு (r) ·50 எனில்,

$$E = 1-\sqrt{1-{\cdot}25}$$
$$= 1-{\cdot}87 = {\cdot}13$$

எனவே, சோதனையின் முன்கூற்றுத் திறமுடைமை 13% ஆகும். $r = {\cdot}98$ எனின் $E = {\cdot}80$; சோதனையின் முன்கூற்றுத் திறமுடைமை இப்பொழுது 80% ஆகும். ஆகவே, சோதனையின் முன்கூற்றுத் திறமுடைமை 50% மேல் இருக்க, உடன் தொடர்புக்கெழு குறைந்தது ·87ஆக இருக்கவேண்டும்.

நாம் இதுவரையில், இந்த அத்தியாயத்தில் இரண்டு மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்த நிலைகளை மட்டுமே விவரித்தோம். சில சமயங்களில் இரு மாறிகளிடையேயுள்ள தொடர்பு மிக அதிகமாக இருக்கும்; ஆனால் r-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாகவே இருக்கும். ஏனெனில், மாறிகளிடையேயுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டில் அமைந்திராததும், ஒரு மாறியில் வெளிப்படும் ஏற்றவிலக்கங்களுக்கு வேறொரு மாறி மட்டும் அடிப்படையாக இல்லாமல், பல்வேறு ஆற்றல்களின் குறுக்கீடுகளால் அவை ஏற்பட்டிருக்க வேண்டும் என்பதும் ஆகும். எனவே, இத்தகைய சமயங்களில் சிதறல் விளக்கப்படத்தை அமைத்து மாறிகளின் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளை அமைத்து ஆராய்வது நல்லது.

மதிப்பீட்டின் நம்பகத்திற்குத் திட்டப் பிழை ஓர் அளவையாக இருப்பதால், தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டின் அடிப்படையில் x-லிருந்து yஐயோ அல்லது y-லிருந்து xஐயோ முன்கூறும்போது அத்துடன் மதிப்பீட்டின் திட்டப் பிழையையும் குறிப்பிடுவது மேலானது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1:

அடியிற் கண்ட தந்தை, மகன் உயரம் பட்டியலில் மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடுகளைக் காண்க. தந்தை

யின் உயரம் 67.5″ இருக்கும்போது, மகனின் எதிர்பார்க்கும் சராசரி உயரத்தைக் காண்க.

தந்தையின் உயரம் (அங்.):	65	66	67	67	68	69	71	73
மகனின் உயரம் (அங்.):	67	68	64	68	72	70	69	70

இங்கு $n = 8$.

தந்தையின் உயரம் x	மகனின் உயரம் y	$dx = x-68$	$dy = y-68$	$d^2x = (x-68)^2$	$d^2y = (y-68)^2$	$dx\,dy = (x-68)(y-68)$
65	67	−3	−1	9	1	3
66	68	−2	0	4	0	0
67	64	−1	−4	1	16	4
67	68	−1	0	1	0	0
68	72	0	4	0	16	0
69	70	1	2	1	4	2
71	69	3	1	9	1	3
73	70	5	2	25	4	10
		$\sum d_x = 2$	$\Sigma d_y = 4$	$\sum d^2_x = 50$	$\Sigma d^2_y = 42$	$\Sigma d_x d_y = 22$

$$\bar{x} = 68 + \frac{2}{8} = 68.25$$

$$\bar{y} = 68 + \frac{4}{8} = 68.5$$

$$b = \frac{r\,S_y}{S_x} = \frac{\sum d_x\,d_y - \frac{\sum d_x \sum d_y}{n}}{\sum d_x^2 - \frac{(\sum d_x)^2}{n}}$$

$$\left[\because b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \right]$$

$$b = \frac{22 - \frac{2 \times 4}{8}}{50 - \frac{4}{8}}$$

$$= \frac{21}{49.5} = .42$$

∴ x-ன் மேல் y-ன் தொடர்புப்போக்கு நேர்கோடு

$$(y - \bar{y}) = \frac{r S_y}{S_x}(x - \bar{x})$$

$$\underline{y - 68.5 = .42\,(x - 68.25)}$$

அல்லது $y = .42x + (68.5 - .42 \times 68.25)$

y-ன் மேல் x-ன் தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடு காண,

$$r\frac{S_x}{S_y} = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x \sum d_y}{n}}{\sum d_y^2 - \frac{(\sum d_y)^2}{n}}$$

$$= \frac{22 - \frac{2 \times 4}{8}}{42 - \frac{16}{8}}$$

$$= \frac{21}{40} = \cdot 525$$

∴ y-ன் மேல் x-ன் தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடு

$$(x - \bar{x}) = \frac{r S_x}{S_y}(y - \bar{y})$$

$$x - 68{\cdot}25 = \cdot 525(y - 68{\cdot}5)$$

அல்லது,

$$x = \cdot 0525y + (68\cdot 25 - \cdot 525 \times 68\cdot 5)$$

இப்போது, தகப்பனுரின் உயரம் 67·5 எனில், மகனின் உயரம் காணவேண்டும்.

x கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் (அதாவது தகப்பனுரின் உயரம்) y-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். இங்கு x சார்பிலா மாறி; y சார்ந்த மாறி. எனவே, x-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு அதற்கு இணையான y-ன் மதிப்பைக் காண,

$$(y-\bar{y}) = r\frac{S_y}{S_x}(x-\bar{x})$$ ஐப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

ஆகவே,

$$y - 68\cdot 5 = \cdot 424\,(x - 68\cdot 25)$$

$x = 67\cdot 5$ எனில்

$$y - 68\cdot 5 = 424\,(67\cdot 5 - 68\cdot 25)$$

அல்லது $$y = 68\cdot 5 - (\cdot 424 \times \cdot 75) = 68\cdot 18''$$

∴ மகனின் உயரம் = 68·18''

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு இரு தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடுகளைக் காண்க. ஒருவர் பாடம் A-ல் 50 மதிப்பெண்கள் பெற்றிருக்கிருர் எனில், பாடம் B-ல் அவர் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பெண் என்ன?

பாடம் A-ல் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் $= 39\cdot 5\ (=\bar{x})$

,, B-ல் ,, ,, $= 47\cdot 5\ (=\bar{y})$

பாடம் A-ல் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் $= 10\cdot 8\ (=S_x)$

,, B-ல் ,, ,, $= 16\cdot 8\ (=S_y)$

A-க்கும் B-க்குமிடையே உடன்தொடர்புக் கெழு $= +\cdot 42 (= r)$

$$\therefore\ \bar{x} = 39\cdot 5$$
$$\bar{y} = 47\cdot 5$$
$$S_x = 10\cdot 8$$
$$S_y = 16\cdot 8$$
$$r = +\cdot 42$$

$\therefore$ இரு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் :

$$\left.\begin{aligned} y-\bar{y} &= r\frac{S_y}{S_x}(x-\bar{x}) \\ x-\bar{x} &= r\frac{S_x}{S_y}(\bar{y}-\bar{y}) \end{aligned}\right\}$$

அல்லது $$\left.\begin{aligned} y-47{\cdot}5 &= {\cdot}42 \times \frac{16{\cdot}8}{10.8}(x-39{\cdot}5) \\ x-39{\cdot}5 &= {\cdot}42 \times \frac{10{\cdot}8}{16{\cdot}8}(y-47{\cdot}5) \end{aligned}\right\}$$

அல்லது

$$\left.\begin{aligned} y-47{\cdot}5 &= {\cdot}65\,(x-39{\cdot}5) \\ x-39{\cdot}5 &= {\cdot}27\,(y-47{\cdot}5). \end{aligned}\right\}$$

x கொடுக்கப்பட்டு y (Subject B) மதிப்பெண் காணவேண்டு மாதலால்,

$y-47{\cdot}5 = {\cdot}65\,(x-39{\cdot}5)$ பயன்படுத்த வேண்டும். எனவே, $x = 50$ எனில்

$$\therefore\ y-47{\cdot}5 = {\cdot}65\,(50-39{\cdot}5)$$

$$= 6{\cdot}825$$

அல்லது $\underline{y = 54{\cdot}325.}$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 3 :

ஒரு சோதனையிலிருந்து கண்டறிந்த விவரங்களில், கீழ்க் கண்ட விவரங்கள் மட்டுமே இருக்கின்றன. இவற்றைக் கொண்டு

(1) x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி

(2) y-ன் திட்ட விலக்கம்

(3) x, y-க்குமிடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

x–ன் திட்ட விலக்கம் = 3.

$$8x-10y+66=0$$

$$40x-18y = 214.$$

முறை

தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடுகள், $(\bar{x}, \bar{x}$–ன்) வழியே செல்வதால்

$$8\bar{x}-10\bar{y}+66=0 \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$40\bar{x}-18\bar{x}-214=0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கண்டால்,

அதாவது, (1)ஐ 5ஆல் பெருக்க

$$40\bar{x}-50\bar{y}=-330$$

$$\therefore \quad 40\bar{x}-50\bar{y}=-330$$

$$40\bar{x}-18\bar{y}=-214$$

கழித்தால்

$$-32\bar{y}=-544$$

$$\therefore \quad \bar{y}=17.$$

சமன்பாடு (1)–லிருந்து

$$8\bar{x}-10\bar{y}=-66$$

(அதாவது) $8\bar{x}-170=-66$

$$\bar{x}=13.$$

$\therefore$ x–ன் கூட்டுச் சராசரி $=13$

y.ன் ,, $=17$.

உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் காணும் முறை

$r\dfrac{S_x}{S_y}$-யையும் $r\dfrac{S_y}{S_x}$ ஐயும், கண்டு இவற்றைப் பெருக்கினால்,

அதாவது

$$r\frac{S_x}{S_y}\times r\frac{S_y}{S_x}=r^2 \text{ கிடைக்கும்.}$$

r^2-க்கு வர்க்க மூலம் கண்டால், உடன் தொடர்புக் கெழு கிடைக்கும்.

எனவே, முதலில் $r\frac{S_x}{S_y}$ ஐக் காண்போம்

$40x-18y=214$ என்ற சமன்பாட்டை $x=C+d_y$ என்ற வடிவில் அமைத்தால், இதில் y சார்ந்த உறுப்பான (Coefficient of y) d-யே $r\frac{S_x}{S_y}$ ஆகும்.

ஆகவே,

$$40x-18y=214$$
$$40x=214+18y$$

(அதாவது)

$$x=5{\cdot}35+{\cdot}45\,y$$
$$\therefore\quad r\frac{S_x}{S_y}={\cdot}45$$

$r\frac{S_y}{S_x}$ ஐக் காண, $8x-10y=-66$ என்ற சமன்பாட்டை $y=a+bx$ என்ற வடிவில் அமைத்தால், இதில் ($y=a+bx$), xஐச் சார்ந்த உறுப்பான b-யே $\frac{r\,S_y}{S_x}$ ஆகும்.

எனவே,

$$8x-10y=-66$$
(அல்லது) $10y=66+8x$

(அல்லது) $y=6{\cdot}6+.8x$

$$\therefore\quad y\frac{S_y}{S_x}=.8$$
$$r\frac{S_x}{S_y}\times r\frac{S_y}{S_x}=r^2$$
$$\therefore\quad r^2=.45\times .8$$
(அல்லது) $r=\sqrt{.45\times .8}$

$$=.6$$

$\therefore$ உடன் தொடர்புக் கெழு $=.6$

[**குறிப்பு :** சமன்பாடுகளைக் கொண்டு, $r\frac{S_x}{S_y}$, $r\frac{S_y}{S_x}$ ஐக் கணக்கிடும் போது, அவற்றிற்குரிய சமன்பாட்டைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது r-ன் மதிப்பு அதன் எல்லைக்குள் $(-1 \leq \gamma \leq +1)$ அமைகின்றவாறு இருக்க வேண்டும். r-ன் மதிப்பு −1-க்கும் + 1-க்கும் வெளியே விழுந்தால், $\frac{r\,S_x}{S_y}$ஐ கணிக்கிட எடுத்துக் கொண்ட சமன்பாடும், $\frac{r\,S_y}{S_x}$ ஐக் கணக்கிட எடுத்துக் கொண்ட சமன்பாடும் அவற்றிற்குரியவை அல்ல என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும்.]

y–ன் திட்ட விலக்கத்தைக் காணுதல் :

x-ன் திட்ட விலக்கம் $= 3 = S_x$

$$r\frac{S_x}{S_y} = .45$$

எனவே,

$$\frac{.6 \times 3}{S_y} = .45$$

(அல்லது) $$S_y = \frac{.6 \times 3}{.45}$$

$$= 4$$

∴ X–ன் கூட்டுச் சராசரி = 13

y–ன் ,, = 17

y-ன் திட்ட விலக்கம் = 4

x, y–ன் உடன் தொடர்புக் கெழு = .6

பயிற்சி 9.

(1) 20 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பிற்கு இரு ஆசிரியர்கள் தனித்தனியாக இறுதி பரீட்சை மதிப்பெண்களைப் பதிவு செய்தனர். அவர்கள் 1 முதல் 9 வரை மதிப்பெண்கள் கொடுத்தனர். மிக அதிகமான மதிப்பெண் 9.

மாணவர்கள்	ஆசிரியர்கள் A	ஆசிரியர்கள் B
1	8	8
2	4	3
3	5	5
4	6	5
5	4	4
6	8	8
7	8	9
8	7	5
9	7	6
10	6	5
11	5	5
12	3	4
13	3	4
14	5	4
15	4	3
16	7	5
17	7	6
18	7	7
19	9	7
20	3	2

(a) இந்த இரு ஆசிரியர்கள் பதிந்த மதிப்பெண்களுக்கு இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

(b) இரு மாறி அலைவுப் பட்டியல் அமைத்து உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் காண்க.

(2) கீழ்க்கண்டதை நிரூபி :

$$\sum (X - \overline{X}) \quad (Y - \overline{Y}) = \Sigma X Y - \frac{\sum X \, \Sigma Y}{N}$$

(3) நுண்ணறிவைச் சோதிப்பதற்காக நடத்தப்பட்ட நேரடி சோதனையிலும், செயற் சோதனையிலும் மாணவர்கள் பெற்ற நுண்ணறிவு ஈவுக்கள் (Intelligence Quotients) அதாவது I. Q. கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இச் சோதனைகளுக்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

மாணவர்	செயற் சோதனை	நேரடிச் சோதனை
1	83	80
2	105	87
3	97	98
4	108	88
5	112	106
6	112	84
7	94	84
8	96	85
9	115	88
10	126	120

(4) கீழே தரப்பட்டவற்றிற்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்பு கெழு, நேர்மறையானதா (Positive), எதிர்மறையானதா (Negative), பூச்சியமாக இருக்குமா என்பதனைக் கூறுக.

(a) பெற்றோர்களின் நுண்ணறிவிற்கும், அவர்களின் குழந்தைகளின் நுண்ணறிவிற்கும்

(b) கல்வியின் வெற்றிக்கும், படிப்பு முடிந்து 10 வருடத்திற்கு பின்பு சம்பாதிக்கும் வருட வருமானத்திற்கும்.

(c) வயதிற்கும், மனத் திறமைக்கும் (Mental ability).

(5) கீழ்கண்ட பட்டியல் கணவன், மனைவியின் வயதினைக் காட்டுகிறது. இதற்குச் சிதறல் விளக்கப் படம் அமைக்கவும்.

கணவன் (x) : 22, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 34, 36

மனைவி (y) : 18, 20, 20, 28, 21, 29, 31, 30, 30

(6) 20 மாணவர்கள் கல்லூரி நுழைவுப் பரீட்சையில் பெற்ற மதிப்பெண்களும் (X), முதல் ஆண்டுச் சராசரி மதிப் பெண்களும் (Y), கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
55	61	70	75	63	85	77	84
79	72	80	61	64	87	62	72
59	69	89	79	69	70	85	70
81	89	92	90	75	90	55	60
62	52	60	55	84	67	66	67

(a) நுழைவுப் பரீட்சை மதிப்பெண்களுக்கும், முதல் ஆண்டுச் சராசரி மதிப்பெண்களுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் காண்க.

(b) நிழைவுத் தேர்வு மதிப்பெண்களிலிருந்து முதல் ஆண்டுச் சராசரி மதிப்பெண்களை மதிப்பிடுவதற்கான (முன் கூறுவதற்கான) மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(c) 20 மாணவர்களுக்கும் மதிப்பிடப்பட்ட முதல் ஆண்டுச் சராசரி மதிப்பெண்களைக் காண்க.

(d) திட்டப் பிழையை (மதிப்பீட்டின்) காண்க.

(7) கீழ்க்கண்டவற்றைப் பயன்படுத்தி இரு தொடர்புச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\bar{x} = 40.3, \quad \bar{y} = 12.5, \quad S_x = 12.6, \quad S_y = 3.6, \quad r = .60$$

(8) 60 நிகழ்ச்சிகளில் கண்ட இரு தொடர்புச் சமன்பாடு கள் : $5x = 6y + 24$; $1000y = 768x - 3608$. உடன் தொடர்புக் கெழு யாது?

(9) $3x = 4y + 9$; $15y = 6x + 7$

(i) x, y-களின் கூட்டுச் சராசரிகளையும், உடன் தொடர்புக் கெழுவினையும் காண்க.

(10) உடன் தொடர்புக் கெழு .70 எனில், *E*ஐக் கணக்கிட்டு, அதற்கு விளக்கம் தருக.

(11) உடன் தொடர்பு என்றால் என்ன? சிதறல் விளக்கப் படம் வரையும் முறையைக் கூறி, அதிலிருந்து உடன் தொடர்பை எங்ஙனம் அறியலாம் என்பதை விவரிக்கவும்.

(12) இரு மாறி அலைவுப் பரவல் என்றால் என்ன? மதிப்பீட்டின் திட்டப்பிழை என்றால் என்ன? இதன் பயன் யாது?

(13) தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடு என்றால் என்ன? ஏன் இரண்டு தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடுகள் உள்ளன? இதன் பயன்கள் யாவை?

(14) உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கொண்டு, இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பினை எங்ஙனம் விவரிப்பாய்?

10. மாதிரி முறைகளும், பெரிய மாதிரிகளில் சிறப்புக்காண் சோதனைகளும்

(Sampling Methods and Tests of Significance in Large Samples)

1. மாதிரி முறைகள்

பல ஆண்டுகளுக்கு முன்பு எந்தெந்தவிவரங்கள் எளிதாகக் கிடைத்தனவோ அவை யாவும் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டன. ஆனால், இன்று எல்லாத் துறைகளிலும் நல்ல முறையில் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டு ஆராயப்படுகின்றன. அண்மையில், விவரங்களை நல்ல முறையில் திட்டத்துடன் சேகரிக்கும் முறைகளில் மிகுந்த முன்னேற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. முழுமைத் தொகுதியின் இயல்புகளை, அதில் பிறந்த மாதிரி பிரதிபலிக்கிறது என்ற அடிப்படையில், பணம், சக்தி, காலம் முதலியவற்றைக் கருத்தில் கொண்டு இன்று எல்லாத் துறைகளிலும் மாதிரி முறையில் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன. அன்றாட வாழ்க்கையில் ஏற்படும் பல பிரச்சனைகளுக்குச் சீரான முறையில் தீர்வு காண மாதிரித் தேர்வுகள் உதவுகின்றன.

சில பண்புகளைப்பற்றி ஆராயும்போது, அந்தப் பண்பினை உட்கொண்ட நபர்களையோ அல்லது பொருள்களையோ அலகுகள் (Units) என்கிறோம். இந்த அலகுகளின் கூட்டமே முழுமைத் தொகுதியாகும். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அலகுகள் வரம்பற்றதாகவோ அல்லது வரம்புள்ளதாகவோ இருக்கலாம். முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பொறுக்கி எடுக்கப்பட்ட அலகு

களின் கூட்டமே மாதிரியாகும். அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியே மாதிரியாகும். மாதிரி எடுத்தல் முறைக்கு அடிப்படையாகவுள்ள அலகுகளை மாதிரி அலகுகள் (Sampling Units) என்கிறோம். இவை தனித் தனியாகவோ (தனி நபர்களோ, தனி வீடுகளோ அல்லது தனி ஒரு பொருளோ) அல்லது பல அலகுகள் சேர்ந்தவைகளாகவோ (பல வீடுகள் சேர்ந்த தெரு, பல நபர்கள் சேர்ந்த குழு, பல பொருள்கள் சேர்ந்த ஒரு தொகுதியாகவோ) இருக்கலாம். மாதிரியிலிருந்து அது பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளையும், (கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், உடன் தொடர்புக் கெழு போன்றவற்றை), முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள மொத்த அலகுகளின் எண்ணிக்கையையும் மதிப்பீடு செய்யலாம். ஒரு மாதிரியில் அடங்கியுள்ள உறுப்புகளின் (அலகுகளின்) எண்ணிக்கையை அம் மாதிரியின் உருவ அளவு (Size) எனக் கூறுகிறோம். நடைமுறையில் 30 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உருவ அளவுடைய மாதிரியைப் பெரிய மாதிரி (Large Sample) எனவும், 30-க்குக் கீழ் உருவ அளவுடைய மாதிரியைச் சிறு மாதிரி (Small Sample) எனவும் கூறுகிறோம்.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது, மாதிரியில் இடம்பெறும் ஒவ்வொரு அலகும் (நபரும் அல்லது பொருளும்) சார்பற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதாக இருக்கவேண்டும். மேலும், அதனைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான ஊக அளவைத் தெரிந்திருக்கவேண்டும். இவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரியிலிருந்து நிறுவும் முடிவுகள் திருத்தமாமவும் திட்பமாகவும் (Frecise) இருக்கும். மாதிரியில் இடம்பெறும் ஒவ்வோர் அலகும் நமது விருப்பத்திற்கிணங்கி தேர்ந்தெடுக்காமல், ஊக அளவை முறைகளைக் கொண்டு ஒரு குறித்த அலகு மாதிரியில் சேர்த்துக்கொள்ளலாமா, கூடாதா என்பதை முடிவு செய்வதுடன், மாதிரியில் சேர்க்கப்படுகிற அலகு என்ன ஊக அளவையுடன் சேர்க்கப்படுகிறது என்பதைத் தீர்மானித்து, தேர்ந்தெடுக்கப்படும் மாதிரியை 'ஊக அளவை மாதிரி' (Probability Sampling) என்கிறோம். மாதிரியில் இடம் பெறும் அலகுகள் நமது விருப்பத்தின் பேரில் மட்டும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவைகளாக இருந்தால், அதனை நோக்கமுடைய மாதிரி (Purposive sample) என்கிறோம். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் ராண்டம் முறைகளையே (Random Methods) மேற்கொள்ளுதல் ஊக அளவை மாதிரியின் தனிச் சிறப்புக்கூறு ஆகும்.

மாதிரியை உருவாக்கும் சில முக்கிய மாதிரி முறைகளைக் காண்போம். அவை :

(1) சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை
(Simple Random Sampling)

(2) படுகை ராண்டம் மாதிரி முறை
(Stratified Random Sampling)

(3) ஒழுங்கு மாதிரி முறை
(Systematic Sampling).

சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை

சாதாரண ராண்டம் மாதிரி முறை மற்ற மாதிரி முறைகளுக்கெல்லாம் அடிப்படையானது. முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் அலகும் மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட ஒரே ஊக அளவை உடையதாக இருந்தால், அது சாதாரண ராண்டம் முறையாகும். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு அலகும் மாதிரியில் இடம்பெற சமவாய்ப்பினைப் பெறுகின்றன. இத்தகு சாதாரண ராண்டம் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கப் பல முறைகள் உள்ளன; அவற்றில் சில முக்கியமான, நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்படும் முறைகளைக் காண்போம்.

சாதாரண ராண்டம் மாதிரியை எடுக்கக் குலுக்கல் முறை (Lottery Method) பயன்படுத்தப்படுகிறது. N அலகுகளைக் (நபர்களைக்) கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n நபர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி எடுப்பதாகக் கொள்வோம். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள N நபர்களையும் 1, 2, 3 ...... என்ற எண்களினால் குறித்தோ அல்லது வேறெந்த முறையிலாவது தனிப்படுத்தியோ காட்டவேண்டும். அந்த N எண்களைத் தனித்தனியாக ஒரே அளவுள்ள தாள்களில் எழுதி, அந்தத் தாள்களைச் சீராகச் சுருட்டி ஒரு கிண்ணத்திலோ அல்லது பெட்டியிலோ போட்டு அவை நன்ருகக் கலக்கும்படிக் குலுக்கிவிடவேண்டும். பிறகு அந்தப் பெட்டியிலிருந்து ஒவ்வொரு தாளாக எடுக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு தாள் எடுத்த பின்பு, மீண்டும் மற்ற தாள்கள் இரண்டறக் கலக்கும்படி குலுக்கிவிடவேண்டும். இவ்வாறு n தாள்களை எடுக்கவேண்டும். எடுக்கப்பட்ட அந்த n தாள்கள் தரும் எண்களைக் கொண்டு நபர்களை மாதிரியின் உறுப்பினர்களாக (அலகுகளைச்) சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டும். இந்த முறையில் பல சிக்கல்கள் உள்ளன. முழு

மைத் தொகுதியின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்கும்பொழுது அவற்றைத் தாள்களில் எழுதுவதும், தாள்களை ஒரே அளவாக வெட்டுவதும், இவற்றை போட்டுக் குலுக்கச் சரியான கிண்ணத்தை அல்லது பெட்டியைத் தேர்ந்தெடுப்பதும் மிக கடினமான செயல்களாகும். ஆகவே, சாதாரண ராண்டம் மாதிரி எடுக்க வேறு முறைகள் மேற்கொள்ளப் படுகின்றன.

ராண்டம் எண் (Random Number) பட்டியலைப் பயன்படுத்திச் சாதாரண ராண்டம் மாதிரி தேர்ந்தெடுக்க முடியும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அலகுகளுக்குத் தனித் தனியே எண்களிட்டு, நமக்குத் தேவையான எண்ணிக்கையுடைய அலகுகளை எளிதாகவும் விரைவாகவும் தேர்ந்தெடுக்க ராண்டம் எண் பட்டியல் உதவும். டிப்பெட், ஃபிஷர் (Fisher), கெண்டால் முதலிய புள்ளியியல் நிபுணர்கள் ராண்டம் எண் பட்டியல் அமைத்துள்ளனர். 10 அலகுகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரி தேவைப்பட்டால் ராண்டம் எண் பட்டியலிலிருந்து 10 தனி எண்களைத் தகுந்த முறையில் எடுக்கவேண்டும். அவ்வெண்களைக் கொண்ட அலகுகள் மாதிரியின் உறுப்பினர்கள் ஆவார்கள். 2000 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து 40 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை உருவாக்கவேண்டுமெனில், முதலில் குழுவிலுள்ள ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் (1–லிருந்து 2000 வரையுள்ள எண்களைக் கொண்டு) எண்களிட வேண்டும். ராண்டம் பட்டியலிலிருந்து 2000–க்குக் கீழ்ப்பட்ட நான்கு இலக்க (Digit) எண்கள் (முழுமைத் தொகுதியில்—குழுவில் மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, 2000–ம், நான்கு இலக்க எண் ஆதலால்) ஏதாவது ஒரு வரிசையிலுள்ள தொடர்ந்த 40 எண்களை எடுக்கவேண்டும். அவ்வெண்களைக் கொண்ட 40 மாணவர்களை நமது மாதிரியில் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டும். ராண்டம் எண் பட்டியலிலிருந்து எண்களை எடுக்கும்போது, பட்டியலில் எந்த இடத்திலிருந்தேனும் தொடங்கி மேலிருந்து கீழோ அல்லது இடமிருந்து வலமோ வரிசையாக 4 இலக்க எண்களை மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். ஆனால், சில எண்களை மேலிருந்து கீழோ சில எண்களை இடமிருந்து வலமோ எடுத்தல் கூடாது. 4 இலக்க எண்களை வரிசையாகப் படித்துக்கொண்டே போனால் 2000-க்கு மேற்பட்ட எண்களை விட்டுவிடவேண்டும்; அதேபோல் ஒரே எண் மறுமுறையும் வந்தால் அதையும் விட்டுவிடவேண்டும். இவ்வாறு (தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட) 40 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு சாதாரண ராண்டம் மாதிரி உருவாக்கலாம்.

படுகை ராண்டம் மாதிரி முறை

முழுமைத் தொகுதியைப் பல பிரிவுகளாக—படுகைகளாக (Strata) ஆக்கி, அப் படுகைகள் ஒன்றோடொன்று படிந்திராமல் (Overlap) தனித் தனியே அமையுமாறு பிரிக்க வேண்டும். பின்பு, ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் தனித்தனியாக குறித்த எண்ணிக்கையுள்ள சிறு மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிறு மாதிரிகள் எல்லாம் ஒன்றுசேர முழு மாதிரியே படுகை மாதிரியாகும். ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சிறு மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது சாதாரண ராண்டம் முறையைப் பயன்படுத்தினால் படுகை ராண்டம் மாதிரி கிடைக்கும். ஒரு குழுவில் N மாணவர்கள் இருந்தால் அவர்களை 1, 2, 3,...K என K பிரிவுகளாகப் பிரித்து, அப்பிரிவுகள் ஒன்றோடொன்று படிந்திராமல் இருக்கின்ற நிலையில் N_1 மாணவர்களைக் கொண்ட முதல் பிரிவிலிருந்து n_1 மாணவர்களையும், N_2 மாணவர்கள் அடங்கிய 2ஆவது பிரிவிலிருந்து n_2 மாணவர்களையும், ... N_k மாணவர்கள் கொண்ட K ஆவது பிரிவிலிருந்து N_K மாணவர்களையும் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை (அதாவது, $n_1+n_2+ \dots + n_K$), n எனில், n மாணவர்களைக் கொண்ட படுகை ராண்டம் மாதிரி ஒன்று கிடைக்கும். முழுமைத் தொகுதி பலப்படித்தானதாக (hetrogeneous) இருக்கும்போது, அதனை ஒருப்படித்தான (homogeneous) படுகைகளாகப் பிரித்து மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது பல வழிகளில் பயன்தரத்தக்கதாக இருக்கின்றன.

ஒழுங்கு மாதிரி முறை

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அலகுகளை ஒழுங்காக 1, 2, 3, ... என எண்களிட்டு வரிசைப்படுத்த வேண்டும். n அலகுகளையுடைய ஒழுங்கு மாதிரி ஒன்று தேர்ந்தெடுக்க, வரிசைப்படுத்தப்பட்ட முதல் K எண்களிலிருந்து (1–லிருந்து K வரையுள்ள எண்களில்) ஏதாவது ஓர் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்து பிறகு அதே ஒழுங்கில் K எண்களுக்கொருமுறை வரும் எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இவ்வாறு n எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அவ்வெண்களைக் கொண்ட அலகுகளையே ஒழுங்கு மாதிரியின் உறுப்பினர்களாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும் முதல் K எண்களிலிருந்து ஓர் எண் தேர்ந்தெடுக்கும் போது (சாதாரண) ராண்டம் முறையைப் பயன்படுத்தினால் அது ஒழுங்கு ராண்டம் மாதிரியாகும். எடுத்துக்காட்டாக 160 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவிலி

ருந்து 16 பேர்களை ஒழுங்கு ராண்டம் மாதிரி முறையில் தேர்ந்தெடுக்க, முதலில் 160 பேர்களுக்கு 1, 2, 3, ... 160 என்ற எண்களை கொடுக்க வேண்டும். 16 பேர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதால், $\left(\frac{160}{16}=10\right)$ 1-லிருந்து 10 வரையுள்ள எண்களில் ஓர் எண்ணை ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்து (தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட எண் 4 எனில்) பிறகு அதே ஒழுங்கில் 10 எண்களுக்கு ஒருமுறை தேர்ந்தெடுத்தால், 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74 ... 154ஆகிய 16 எண்கள் கிடைக்கும். இந்த எண்களைக் கொண்ட பேர்களை மட்டுமே தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இப்போது நமக்குக் கிடைப்பது ஓர் ஒழுங்கு ராண்டம் மாதிரியாகும்.

2. புள்ளி விவர எடுகோள்கள்

ஒரு மாதிரியிலிருந்து கிடைக்கின்ற அளவைகளை மாதிரியின் அளவைகள் (Statistics) எனவும், ஒரு முழுமைத் தொகுதியினின்று பெறுகின்ற அளவைகளை முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள், (Parameters) எனவும் வழங்குகின்றோம். ஒரு மாதிரியைப் பற்றி தெரிந்த செய்திகளின் அடிப்படையில் அம் மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியைப்பற்றி பொதுவான முடிவுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. மாதிரி விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் போன்ற மாதிரியின் அளவைகளைக் கண்டு, அம் மாதிரி அளவைகளுக்கு இசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளான கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் போன்ற அளவைகளைப் பற்றி கூறுவதே புள்ளியியல் உய்த்துணர்வின் (Statistical Inference) நோக்கமாகும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி விவரங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் தெரியாத ஏதோ ஓர் அளவையை (கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் போன்ற அளவைகளை) மதிப்பிடுவதைப் புள்ளியியல் மதிப்பீடு (Statistical Estimation) என்கிறோம். புள்ளியியல் முடிவுகளை (Statistical decisions) அடைய முயல்வதில், உட்பட்ட முழுமைத் தொகுயின் தன்மையைப்பற்றி ஊகங்கள் (guesses) அல்லது புனைவுகள் (assumptions) மேற்கொள்வது, பல வழிகளில் அது உபயோகமானதாக அமைகிறது. அத்தன்மை முழுமைத்தொகுதியின் அளவையாக இருக்கலாம். மேற்கொண்ட ஊகங்கள் சரியானவைகளாகவோ அல்லது தவறானவைகளாகவோ இருக்கலாம். அத்தகைய ஊகங்களைப் புள்ளி விவர எடுகோள்கள் (Statistical hypotheses) என்கிறோம். புள்ளி விவர முடிவுகள் எப்பொழுதும் ஊக அளவையின் (Probability) அடிப்படையில்தான் காணப்படுகின்றன.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்த மாதிரியின் அளவைக்கும் அந்த அளவைக்கிசைந்த முழுமை தொகுதியின் அளவைக்கும், அல்லது கண்டறிந்த மதிப்பிற்கும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பிற்கும் வேறுபாடு இல்லை என்ற எடுகோளை மேற்கொண்டால் அத்தகைய எடுகோளைச் சூனிய எடுகோள் (Null hypothesis) என்கிறோம். புள்ளி விவர எடுகோளைச் சோதனை செய்யும்பொழுது மேற்கொள்ளப்பட்ட எடுகோளின்றி பிற எடுகோள்களும் இருக்கலாம். இவ்வாறு மேற்கொண்ட எடுகோளைச் சூனிய எடுகோள் (H_0) என்றும், இதிலிருந்து வேறுபட்ட பிற எடுகோளை மாற்று எடுகோள் (Alternative hypothesis) எனவும் வழங்குகின்றோம். அந்த மாற்று எடுகோளை H_1 என்று குறிக்கின்றோம்.

மாதிரியின் அளவைக்கும், அதற்கிசைந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கும் அல்லது கண்டறிந்த மதிப்பிற்கும் எதிர்பார்க்கும் வேறுபாடு இருக்கலாம். இவ் வேறுபாடு 'தள்ளத்தக்க அளவிற்குச் சிறியதாக மாதிரி முறையினால் ஏற்படும் ஏற்ற விறக்கங்களினால் ஏற்பட்டதா? அல்லது பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு மாதிரி ஏற்ற விறக்கங்களினால் ஏற்பட்டது என்று கூற முடியாத அளவிற்குப் பெரியதா? என்ற கேள்விக்கு விடை காண நடத்தப்படும் சோதனைகளைச் 'சிறப்புக்காண் சோதனைகள்' (Tests of Significance) அல்லது 'எடுகோள் சோதனைகள்' (Tests of hypothesis) எனக் கூறுகிறோம், வேறுபாடு சிறியதாக இருக்குமானால் சூனிய எடுகோளினின்று முரண்படவில்லை எனக் கூறுகிறோம். வேறுபாடு பெரியதாக இருக்குமானால் சூனிய எடுகோளினின்று முரண்பட்டது எனக் கூறுகிறோம். இந்த வேறுபாட்டின் சிறப்பு எப்பொழுதும் ஊக அளவையின் அடிப்படையில்தான் காண்கிறோம். கண்டறிந்த வேறுபாட்டிற்கு மாதிரி முறையினால் ஏற்படும் ஏற்ற விறக்கங்கள்தான் காரணம் எனக் காட்டுவதற்கான ஊக அளவை மிகக் குறைவாக இருக்குமானால் சூனிய எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது. இப்பொழுது, வேறுபாடு சிறப்புடையதாகக் கொள்ளப்படுகிறது. வேறுபாட்டிற்கு மாதிரிகளின் ஏற்ற விறக்கங்களைக் காரணமாக காட்டுவதற்கான ஊக அளவை பெரியதாக இருக்குமானால், சூனிய எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. இப்போது வேறுபாடு சிறப்புடையதன்று எனக் கூறுகிறோம்.

நாம் எடுக்கும் முடிவுகளில் சாதாரணமாக, இருவகைப் பிழைகளைச் செய்ய நேரிடலாம். அவை: (1) சோதனை

செய்யப்படும் எடுகோள் (H_0) உண்மையாக (True) இருக்கும் போது சோதனையின் முடிவின்படி அதனைத் தள்ளுபடி செய்வது ஆகும். இதனை முதல் வகைப் பிழை (Type I Error) எனக் கூறுகிறோம். (2) சோதனை செய்யப்படும் எடுகோள் (H_0) பொய்யானதாக (false) இருக்கும்போது அதனை ஏற்கும்படி சோதனையின் முடிவு அமைவதாகும். இதனை இரண்டாவது வகைப பிழை (Type II Error) என்கிறோம். அதாவது, ஏற்க வேண்டிய ஒரு சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்வது முதல் வகைப் பிழை எனவும், தள்ளுபடி செய்யப்பட வேண்டிய ஒரு சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்வது இரண்டாவது வகைப் பிழை எனவும் கூறுகிறோம். இவ்விரு வகைப் பிழைகளையும் முடிந்த அளவுக்குக் குறைக்க முனைய வேண்டும். ஆனால், ஒரு வகைப் பிழையைக் குறைக்க முயன்றால் மற்றொரு வகைப் பிழை அதிகமாகும். எனவே, இரண்டாவது வகைப் பிழையை விட முதல் வகைப் பிழையைச் செய்யாதிருப்பது அவசியமாகக் கருதப்படுவதால், முதலில் முதல் வகைப் பிழையைக் கட்டுப் படுத்த முயல வேண்டும். நடை முறையில் முதல்வகைப் பிழையைச் செய்வதற்கான ஊக்அளவையை எதேச்சையாகத் தீர்மானித்து (arbitrarily fixed), இரண்டாவது வகைப் பிழையை முடிந்த அளவுக்குக் குறைக்க முயல்கிறோம். எடுகோள் சோதனைகளில் முதல்வகை பிழைக்கான ஊக அளவையைச் சோதனையின் சிறப்பு வரம்பு (level of Significance) என வழங்குகின்றோம். இருவகைப் பிழைகளின் சாத்தியமான விளைவுகளைக் கருத்தில் கொண்டு சிறப்பு வரம்பு என்னவாக இருக்க வேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்க வேண்டும். மேலும், மாதிரி தேர்ந்தெடுப்பதற்கு முன்பே சோதனையின் சிறப்பு வரம்பைத் தீர்மானிப்பது நல்லது. எடுத்துக் காட்டாக, .05ஐச் சிறப்பு வரம்பாக எடுத்துக் கொண்டால், முதல் வகைப் பிழை நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு 5% என்னவாகும். அதாவது ஏற்க வேண்டிய எடுகோளை (அதாவது, சூனிய எடுகோள் உண்மையானதாக இருக்கும்போது அதனை) தள்ளுபடி செய்வதற்கான வாய்ப்புகள் நூற்றில் 5 வாய்ப்புகளேயாகும். ஆகவே, நாம் எடுத்துக் கொண்ட முடிவு சரியான முடிவு என 95% நம்பிக்கையுடன் கூறலாம்.

சிறப்புக்காண் சோதனைகளில் சூனிய எடுகோளைத் (H_0ஐ) தள்ளுபடி செய்வதாக இருக்கும்போது மாற்று எடுகோளை (H_1ஐ) ஏற்றுக்கொள்கிறோம். எடுத்துக் காட்டாக, கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாட்டின் சிறப்பைச் சோதனை செய்யும் போது, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ என்ற சூன்ய எடுகோளைக் கொள்கிறோம்.

சோதனையின் முடிவின்படி எடுகோளைத் (சூனிய எடுகோளை) தள்ளுபடிசெய்வதாக இருக்கும்போது, மாற்று எடுகோள்களான $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ அல்லது $H_1: \mu_1 > \mu_2$ அல்லது $H_1: \mu_1 < \mu_2$ ஆகியவற்றில் ஒன்றை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். சோதனையின் முடிவின்படி $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ என்ற மாற்று எடுகோளை ஏற்பதாகச் சோதனை அமைந்தால், அத்தகைய சோதனையை இருமுனைச் சோதனை (Two tailed test) எனவும், $H_1: \mu_1 > \mu_2$ அல்லது $H_1: \mu_1 < \mu_2$ என்ற மாற்று எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டியதாகச் சோதனையின் முடிவு அமைந்தால், அத்தகைய சோதனையை ஒருமுனைச் சோதனை (One-tailed test) எனவும் கூறுகிறோம். சிறப்புக்காண் சோதனைகளில் தனித்த (absolute) வேறுபாட்டைக் (குறிகளை பொருட்படுத்தாது) காண முயலும்போது, இருமுனைச் சோதனைகளே பொருத்தமானதாக இருக்கின்றன.

3. மாதிரிப் பரவல்

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எண்ணற்ற மாதிரிகளை உருவாக்கலாம். ஓரே உருவ அளவுடைய பல மாதிரிகளை ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அடுத்தடுத்துத் தேர்ந்தெடுத்து (ஒரு மாதிரியை எடுத்த பின்பு அதனை மீண்டும் முழுமைத் தொகுதியில் சேர்த்துவிட வேண்டும்), ஒவ்வொரு மாதிரியிலிருந்தும் மாதிரியின் ஓர் அளவையை (கூட்டுச் சராசரியை அல்லது திட்ட விலக்கத்தை அல்லது மற்ற ஏதாவதோர் அளவையை) கணக்கிட்டு, அவற்றை (கூட்டுச் சராசரிகளை அல்லது திட்ட விலக்கங்களை அல்லது மற்ற அளவைகளை)க் கொண்டு ஓர் அலைவுப் பரவல் அமைக்கலாம். அத்தகைய பரவலை அவ்வளவையின் மாதிரிப் பரவல் (Sampling distribution) என்கிறோம். எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஒரு மாதிரியை ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்து, அந்த மாதிரியிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம். கூட்டுச்சராசரி 60 என்போம். இப்போது எடுக்கப்பட்ட மாதிரியை முழுமைத் தொகுதியில் சேர்த்துவிட்டு, பல மாதிரிகளை இதே போல் அடுத்தடுத்துத் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு மாதிரியிலிருந்தும் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிடுவோம். இவ்வாறு கணிக்கப்பட்ட கூட்டுச் சராசரிகளை, 62·1, 59·0, 63, 58, ... என்போம். இப்பொழுது இக் கூட்டுச் சராசரிகளை (அதாவது 62·1, 59·0 63, 58, ... ஆகியவற்றை) ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டுவோம். இந்த அலைவுப் பரவலுக்கு, கூட்டுச் சராசரியின் மாதிரிப் பரவல் (Sampling distribution of the mean) எனப் பெயராகும். இதேபோல மற்ற மாதிரி அளவைகளின் மாதிரிப்

பரவல்களையும் அமைக்கலாம். மாதிரிகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதி ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையாவிடினும் கூட, மாதிரியின் உருவ அளவு பெரியதாக (30 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட) இருக்கும்போது, மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும்.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பல மாதிரிகளை உருவாக்கி, அம் மாதிரிகளிலிருந்து கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு, அக் கூட்டுச் சராசரிகளை ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்து, அந்த அலைவுப் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடமுடியும். இவ்வாறு கணிக்கப்பட்ட திட்ட விலக்கத்திற்குக் கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப் பிழை (Standard Error) எனப் பெயராகும். அதாவது, கூட்டுச் சராசரியின் மாதிரிப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப் பிழை என்கிறோம். இது போன்று மாதிரிப் பரவலின் ஏதாகிலும் ஓர் அளவையின் (Statistic) திட்ட விலக்கத்திற்கு அந்த அளவையின் திட்டப் பிழை எனப் பெயராகும். ஓர் அளவையின் திட்டப் பிழை அவ்வளவைகளின் (மாதிரிக் கூட்டுச்சராசரியின் அல்லது திட்ட விலக்கங்களின் அல்லது மற்ற மாதிரி அளவைகளின்) சிதறலை அளிக்கிறது.

4. பெரிய மாதிரிகளில் சிறப்புக்காண் சோதனைகள் (Tests of Significance in large samples)

புள்ளியியல் எடுகோளுக்கும் கண்டறிந்த விவரங்களுக்குமுள்ள வேறுபாட்டைக் காண்பதை எடுகோள் சோதனைகள் அல்லது சிறப்புக்காண் சோதனைகள் எனவும், கண்டறிந்த விவரங்கள் சூனிய எடுகோளோடு முரண்பட்டால், எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும் என்பதையும், கண்டறிந்த விவரங்கள் சூனிய எடுகோளோடு முரண்படாவிட்டால் எடுகோளை ஏற்கவேண்டும் என்பதையும் முன்னர்க் குறிப்பிட்டோம். இப்போது பலவகைப் புள்ளியியல் எடுகோள்களைச் சோதனை செய்ய மேற்கொள்ளப்படும் செயல்முறைகளைக் காண்போம்.

இயல்நிலைப் பரவலும் எடுகோள் சோதனையும்

மாதிரிகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் இயல்நிலையாக அமையாவிடினும்கூட, மாதிரியின் உருவ அளவு 30 அல்லது 30-க்கு மேற்பட்டதாக இருக்கும்பொழுது, மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலையாகவோ அல்லது இயல்நிலைக்கு நெருங்கியதாகவோ இருக்கும் என்பதை ஏற்கெனவே குறிப்பிட்டிருந்

தோம். கொடுக்கப்பட்ட சூனிய எடுகோளின்படி, S என்ற ஒரு மாதிரியின் அளவை, M_sஐக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், σ_sஐத் திட்ட விலக்கமாகவும், கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பின் பற்றுகிறது எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது $T = \frac{S - M_s}{\sigma_s}$ ஆனது 0-வினைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும் 1ஐத் திட்ட விலக்க மாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது எனக் கொள்கிறோம். Tஐத் திட்ட இயல்நிலை மாறி (Standard normal variate) எனக் கூறுகிறோம்.

ஆராயப்படும் சூனியஎடுகோள் உண்மையானதாக இருக்கு மானால், திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு (T-ன் மதிப்பு) $-1{\cdot}96$-க்கும் $+1{\cdot}96$-க்கும் இடையில் விழும் என 95% நம்பிக் கையுடன் கூறலாம். ஏனெனில், $-1{\cdot}96$, $+1{\cdot}96$ ஆகியவற்றி லுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே இயல்நிலை வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பு (வளைகோட்டுக்குள் அடங்கும் மொத்த பரப்பு 1 எனக்கூறினால்) 95 ஆகும். சூனிய எடுகோள் உண்மையானதாக இருக்குமானால், T-ன் மதிப்பு $-2{\cdot}58$-க்கும் $+2{\cdot}58$-க்குமிடையில் விழும் என 99% நம்பிக்கையுடன் கூறமுடியும். ஒரே ஒரு ராண்டம் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்கையில் T-ன் மதிப்பு $-1{\cdot}96$-க்கும் $+1{\cdot}96$-க்கும் வெளியே விழுந்தால், அத்தகைய நிகழ்ச்சி, சூனிய எடுகோள் உண்மையானதாக இருக்கையில், $0{\cdot}05$ ஊக அளவையுடன் மட்டுமே நிகழமுடியும் என நாம் கூறலாம். இப்பொழுது எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்து, வேறுபாடு சிறப்புடையது எனக் கூறுகிறோம்.

$-1{\cdot}96$-க்கும் $+1{\cdot}96$-க்கும் வெளியே T மதிப்புகள் அமைக் கும் மண்டலத்தை (Region) 'மாறுநிலை மண்டலம்' அல்லது 'தள்ளுபடி மண்டலம்' (Critical region or Rejection region) எனவும் T மதிப்புகள், $-1{\cdot}96$-க்கும் $+1{\cdot}96$-க்குமிடையே அமைக்கும் மண்டலத்தை 'ஏற்பு மண்டலம்' (Acceptance region) எனவும் கூறுகிறோம். $\cdot 05$ என்பது மாறுநிலை மண்டலத்தின் அளவாகும் (size).

மேலே கூறியவற்றைச் சுருக்கமாகவும், சற்றுத் தெளிவாக வும் கூறுவோம்: $|T| \left(= \frac{|S-M_s|}{\sigma_s}\right)$-ன் மதிப்பு $1{\cdot}96$ஐ விடப் பெரியதாக இருப்பின் சூனிய எடுகோளை $\cdot 05$ சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும். இப்போது வேறுபாடு $(S-M_s)$ 5% வரம்பில் சிறப்புடையது எனக் கூறுகிறோம். $|T|$-—ன்

மதிப்பு 1·96-க்குச் சமமாகவோ அல்லது அதற்கும் சிறியதாதாகவோ இருப்பின், வேறுபாடு 5% வரம்பில் சிறப்புடையதன்று எனக் கூறுகிறோம். வேறுபாட்டினை 'D' எனவும், அவ்வேறுபாட்டின் திட்ட விலக்கத்தை (திட்டப்பிழையை) σ_D எனவும் கொண்டால் $\frac{D}{\sigma_D}$ ஐத் தீர்மானிக்கும் விகிதம் (Critical ratio) என வழங்குகின்றோம். சிறப்பு வரம்பாக எடுத்துக்கொண்டால், $|T|$-ன் மதிப்பு 2·58ஐ விடப் பெரிதாக இருப்பின் சூனிய எடுகோளை ·01 வரம்பில் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும். ·05 அல்லது ·01ஐச் சிறப்பு வரம்பாகக் கொள்வது ஒருமுகமான வழக்கமாகும்.

சில சிறப்புக்காண் சோதனைகள் (பெரிய மாதிரி)

(1) மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும், முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு.

கொடுக்கப்பட்ட ஒழு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்த, 'n' உருவ அளவுடைய பல மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் கொண்டு ஒரு பரவல் அமைத்தால், அந்தப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சமமாகவும், அப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் (அதாவது திட்டப்பிழை), $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$-க்குச் சமமாகவும் இருக்கும். இங்கே, σ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கமாகும்.

சூனிய எடுகோள் (H_0): மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும் (எதிர்பார்க்கும் கூட்டுச் சராசரிக்கும்) வேறுபாடு இல்லை.

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $= \mu$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $= \sigma$

அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்த மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \overline{X}$

மாதிரியின் உருவ அளவு $= n$

$\overline{X}$-ன் திட்ட விலக்கம் $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(கூட்டுச் சராசரிகள்) வேறுபாடு $= \overline{X} - \mu$

வேறுபாட்டின் திட்ட விலக்கம் (அதாவது திட்டப் பிழை) =

$\overline{X}$-ன் திட்ட விலக்கம் $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (μ, நிலை உறுப்பு ஆதலால்)

அதாவது, $\sigma_D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\therefore \quad T = \frac{|\overline{X}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{|\overline{X}-\mu|\sqrt{n}}{\sigma}$$

$T > 1.96$ எனில், 5% (·05) சிறப்பு வரம்பில் (H_0ஐ) சூனிய எடுகோளைத் தள்ளிவிட வேண்டும். எனவே, மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதிக் கூட்டுச் சராசரிக்கு முள்ள வேறுபாடு (பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு உள்ளது) 5% சிறப்பு வரம்பில் சிறப்புடையது.

$T \leq 1.96$ எனில், H_0ஐ 5% வரம்பில் ஏற்க வேண்டும். ஆகவே, மாதிரிக் கூட்டுச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் வேறுபாடு (பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு) இல்லையென 5% சிறப்பு வரம்பில் முடிவு கூறலாம்.

குறிப்பு : முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் (σ) கொடுக்கப்படாவிட்டால், σ_Dஐக் கணக்கிட, மாதிரியின் திட்ட விலக்கத்தை (s), σ-க்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தலாம். எனவே, இங்கு

$$T = \frac{|\overline{X}-\mu|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{|\overline{X}-\mu|\sqrt{n}}{S}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஒரு மாகாணத்திலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட வயதையுடைய குழந்தைகளின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழு : 100; திட்ட விலக்கம் 16 18. அந்த மாகாணத்திலிருந்து தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட 202 (அதே வயதையுடைய) குழந்தைகளின்

கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழு 101.78 எனில், மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழுவிற்கும், முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழுவிற்குமுள்ள வேறுபாடு சிறப்புடையதா?

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழு = 100

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் = 16.18

மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழு = 101.78

மாதிரியின் உருவ அளவு = 202

அதாவது,

$$\mu = 00; \quad \sigma = 16.18$$

$$\overline{X} = 101.78; \; n = 202$$

$$\therefore \quad T = \frac{|\overline{X} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|101.78 - 100|}{\frac{16.18}{\sqrt{202}}}$$

$$= \frac{|101.78 - 100|}{1.14}$$

$$= \frac{1.78}{1.74}$$

$$= 1.56$$

T-ன் மதிப்பு, 1.96-க்குக் குறைவாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளை (H_0ஐ) ஏற்க வேண்டும். எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவுக்கும், மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவுக்கும் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வேறுபாடு இல்லையெனக் கூறலாம். அதாவது இந்த வேறுபாடு 5% சிறப்பு வரம்பில் சிறப்புடையது அன்று.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2:

100 ராணுவ வீரர்கள் கொண்ட ஒரு குழு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சோதனையில் பெற்ற கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 98.00; திட்ட விலக்கம் 4 ஆகும். இந்த ராணுவ குழு, 95ஐக் கூட்டுச்

சராசரி மதிப்பெண்ணாக கொண்ட ஒரு பெரிய குழுவிலிருந்து (1500 வீரர்கள் அடங்கிய குழுவிலிருந்து) பிறந்ததுதான் என்பதை ஆய்க.

H_o : சிறிய குழு பெரிய குழுவிலிருந்து பிறந்தது.

(இங்கு முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப் படவில்லை.)

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி (μ) = 95

100 வீரர்கள் கொண்ட குழுவின் கூட்டுச் சராசரி மதிப் பெண் = 98.00

அதாவது $\overline{X} = 98.00$

மாதிரியின் உருவ அளவு (n) = 100

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் (S) = 4

மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் வேறுபாடு இல்லையென்பதே சூனிய எடு கோளின் பொருளாகும்.

$$\therefore \quad T = \frac{|X - \mu|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{|98.00 - 95.00|}{\frac{4}{\sqrt{100}}}$$

$$= \frac{3}{\frac{4}{10}} = \frac{3 \times 10}{4}$$

$$= 7{\cdot}5$$

***T*-ன் கண்டறிந்த** மதிப்பு (= 7.5), 1·96ஐ விடப் பெரிதாக இருப்பதால் ($T > 1.96$), H_oஐ 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, 95ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்ட குழுவிலிருந்து, 98ஐக் கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்ட குழு பிறந்தது அன்று என முடிவு கூறலாம்.

2. மாதிரியின் இடைநிலைக்கும் முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலைக்குமுள்ள வேறுபாடு

மாதிரியின் இடைநிலையை M_1 என்க.

முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலையை M_2 என்க.

இடை நிலைகளின் வேறுபாடு $M_1 - M_2$

M_1-ன் திட்ட விலக்கம் $(\sigma_{M_1}) = \frac{1.253 \times \sigma}{\sqrt{n}}$ (இங்கு σ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்; n என்பது மாதிரியின் உரு அளவு) அல்லது,

$\sigma_{M_1} = \frac{1.858 \times Q}{\sqrt{n}}$ இங்கு Q என்பது கால்மான விலக்கம்)

$(M_1 - M_2)$வின் திட்டப் பிழை (திட்ட விலக்கம்)

$$= \frac{1.253 \times \sigma}{\sqrt{n}}$$

அல்லது $\frac{1.858\ Q}{\sqrt{n}}$ ($\because$ M_2 நிலை உறுப்பு)

$$\therefore \quad T = \frac{|M_1 - M_2|}{\frac{1.253 \times \sigma}{\sqrt{n}}}$$

அல்லது,

$$T = \frac{|M_1 - M_2|}{\frac{1.858 \times Q}{\sqrt{n}}}$$

σ அறியப்படாவிட்டால்,

$T = \frac{|M_1 - M_2|}{\frac{1.253 \times S}{\sqrt{n}}} = \frac{|M_1 - M_2|\ \sqrt{n}}{1.253 \times S}$ (இங்கு S என்பது மாதிரியின் திட்ட விலக்கம்.

$T > 1.96$ எனில் சூன்ய எடுகோளை 5% வரம்பில் தள்ளுபடி செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 3 :

ஒரு பள்ளியில் 100 மாணவர்களின் இடைநிலை உயரம் = 56.4″; திட்ட விலக்கம் = 4″. அப் பள்ளியில் எல்லா மாணவர்களின் இடை நிலை உயரம் 60.4″; திட்ட விலக்கம் = 3″ எனில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 மாணவர்களின் இடைநிலை உயரத்திற்கும் அப் பள்ளியின் எல்லா மாணவர்களின் இடைநிலை உயரத்திற்கும் வேறுபாடு உண்டா என்பதை ஆய்க.

$$M_1 = 56.4''$$

$$M_2 = 60.4''$$

$$\sigma = 3''$$

$$S = 4''$$

$$n = 100$$

$$T = \frac{| M_1 - M_2 | \sqrt{n}}{1.253 \times \sigma}$$

$$\frac{| 56.4 - 60.4 | \times \sqrt{100}}{1.253 \times 3}$$

$$= \frac{4 \times 10}{3.759}$$

$$= 10.64$$

T–ன் மதிப்பு (10.68) > 1.96 ஆக இருப்பதால் வேறுபாடு இல்லையென்ற எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம் (5% சிறப்பு வரம்பில்). ஆகவே, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் இடைநிலை உயரத்திற்கும் அப் பள்ளியின் எல்லா மாணவர்களின் இடைநிலை உயரத்திற்கும் வேறுபாடு உண்டு எனக் கூறலாம்.

3. இரு மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பு

இது புள்ளி விவர ஆய்வுகளில் அடிக்கடி தோன்றும் பிரச்சினையாகும். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தனவா அல்லது வேறுபட்ட முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிறந்தனவா என அறிய விரும்புகிறோம்.

(i) சமமான திட்ட விலக்கங்களை (σஐ)யுடைய இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து ராண்டம் (Random) முறைகளால் இரு சார்பிலா மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுப்பதாகக் கொள்வோம்.

முதல் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \overline{X_1}$

அதன் உருவ அளவு $= n_1$

(2ஆவது) மற்றொரு மாதிரியின் கூட்டுச்சராசரி $= \overline{X}_2$

அதன் உருவ அளவு $= n_2$

கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாடு $= \overline{X}_1 - \overline{X}_2$

$(X_1 - X_2)$இன் திட்டப் பிழை (திட்ட விலக்கம்)

$$= \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}|_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

எடுகோள் (H_0) = இரு முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளிடையே வேறுபாடு இல்லை (அதாவது $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; இங்கு μ ; μ_2 என்பவை முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள்).

எடுகோள் உண்மையானால்,

Tஆனது 0-விளைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், 1ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது $[T \rightarrow N(0, 1)]$.

$\therefore \quad T > 1 \cdot 96$ எனில் எடுகோள் 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும்.

குறிப்பு :

σ அறியப்படா நிலையில் மாதிரிகளின் திட்ட விலக்கங்களான, S_1, S_2 ஆகியவற்றிலிருந்து σ-வை மதிப்பிடலாம். அம் மதிப்பீடு,

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, இங்கு

$$T = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 n_2}}}$$

இங்கு S_1 = முதல் மாதிரியின் திட்ட விலக்கம்

S_2 = இரண்டாவது மாதிரியின் திட்ட விலக்கம்.

(ii) இரு மாதிரிகளும் வெவ்வேறு (வேறுபட்ட திட்ட விலக்கங்களையுடைய) முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப் பட்டால்,

$$T = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு,

σ_1 = முதல் மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்

σ_2 = 2ஆவது மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்.

குறிப்பு : σ_1, σ_2 ஆகியவை அறியப்படா நிலையில்,

$$T = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n^2}}} \text{ என அமையும்.}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

500 மாணவர்கள் கொண்ட 10ஆம் வகுப்பு மாணவர்களில் 80 மாணவர்களையும், 400 மாணவிகளையும் கொண்ட 10ஆம் வகுப்பிலிருந்து 90 மாணவிகளையும் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்

தெடுத்து, திறமைச் சோதனையில் அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் (கீழ்க்கண்ட விவரங்கள்) சேகரிக்கப்பட்டன. திறமையில், மாணவர்களும் மாணவிகளும் வேறுபடுகின்றனரா என்பதை ஆய்க.

	மாணவர்கள்	மாணவிகள்
மொத்த எண்ணிக்கை	80	90
கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்	30	31.1
திட்ட விலக்கம்	4	3

இங்கே, $n_1 = 80,\quad n_2 = 90$

$\overline{X}_1 = 30,\quad \overline{X}_2 = 31\cdot1$

$S_1 = 4,\quad S_2 = 3$

H_0: திறமையில் மாணவர்களுக்கும் மாணவிகளுக்கும் வேறுபாடு இல்லை. ($H_0 : \mu_1 = \mu_2$).

$$T = \frac{|30-31\cdot1|}{\sqrt{\frac{4^2}{80}+\frac{3^2}{90}}} = \frac{1\cdot1}{\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}}$$

$$= \frac{1\cdot1}{\cdot55} = 2.$$

கண்டறிந்த $T(=2) > 1\cdot96$ ஆக இருப்பதால், H_0ஐ 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம். ஆனால் $T < 2\cdot58$ ஆக இருப்பதால், H_0ஐ 1% சிறப்பு வரம்பில் ஏற்றுக்கொள்கிறோம். எனவே, திறமையில் மாணவர்களுக்கும் மாணவிகளுக்கும் ·05 சிறப்பு வரம்பில் வேறுபாடு இருக்கிறது என முடிவு கூறலாம். ஆனால், ·01 சிறப்பு வரம்பில் வேறுபாடு இல்லையெனவும் முடிவு கூறலாம். இரு கூட்டுச் சராசரிக்குள்ள வேறுபாடான 1·1 (31·1—30) சந்தர்ப்பத்தால் (மாதிரிகளின் ஏற்ற விறக்கங்களினால்) ஏற்பட்டது எனக் (1% சிறப்பு வரம்பில்) கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வுக்காக ஒரு குழுவினைத் தயார்செய்ய அக்கறைச் சோதனை (Interest test) *A* வகுப்பில் 46 மாணவர்களுக்கும் *B* வகுப்பில் 50 மாணவர்களுக்கும் கொடுக்கப்படுகிறது. இவ்விரு வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் வருமாறு:

வகுப்பு	n	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
A	40	50	3
B	60	53	2

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து (σ திட்ட விலக்கத்தைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து) எடுக்கப்பட்டவைகளா ?

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $= \sigma$ (கொடுக்கப் படவில்லை).

எனவே, அதன் மதிப்பீடு

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}}$$

$$n_1 = 40; \qquad n_2 = 60$$

$$\bar{X}_1 = 50; \qquad \bar{X}_2 = 53$$

$$S_1 = 3; \qquad S_2 = 2$$

H_0 : இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை

$$T = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{40 \times 9 + 60 \times 4}{40 + 60}} = \sqrt{\frac{600}{100}}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad T = \frac{|50 - 53|}{(\sqrt{6})\sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}}}$$

$$= \frac{3}{(\sqrt{6})\sqrt{\frac{100}{2400}}}$$

$$\simeq \frac{3\times 49}{\sqrt{6}\times 10}$$

$$= \frac{147}{24.5} = 6$$

$$\therefore \quad T \simeq 6$$

கண்டறிந்த $T(=6) > 1{\cdot}96$ (இயல்நிலை பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து) ஆக இருப்பதால், H_0ஐ 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம். ஆகவே, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்தன எனக் கூறமுடியாது. எனவே, இரு வகுப்பு மாணவர்களுக்குமிடையே வேறுபாடு இருக்கிறது. B வகுப்பின் கூட்டுச் சராசரி $>A$ வகுப்பின் கூட்டுச் சராசரியாக இருப்பதாலும், B-ன் திட்ட விலக்கம் $<A$-ன் திட்ட விலக்கமாக இருப்பதாலும், B வகுப்பு மாணவர்களைப் பரீட்சைக்குத் தயார் செய்யலாம்.

4. முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்திற்கும் மாதிரியின் திட்ட விலக்கத்திற்குமுள்ள வேறுபாடு

கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறக்கும் 'n' உருவ அளவுள்ள பல மாதிரிகளின் திட்ட விலக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு பரவல் அமைத்தால், அப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$-க்குச் சமம். மேலும், அப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும்.

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $= \sigma$ என்க.

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S$ என்க.

$\therefore$ வேறுபாடு $(D) = S-\sigma$

S-ன் திட்டப் பிழை (திட்ட விலக்கம்) $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

n என்பது மாதிரியின் உருவ அளவு. σ என்பது நிலை உறுப்பு ஆதலால்,

$(S-\sigma)$-வின் திட்டப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

அதாவது $\sigma_D = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

$$\therefore \quad T = \frac{|D|}{\sigma_D} = \frac{|S-\sigma|}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}}$$

$T < 1 \cdot 96$ஆக இருந்தால், H_0ஐ (H_0 : முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்திற்கும் மாதிரி திட்ட விலக்கத்திற்கு மிடையே வேறுபாடு இல்லை) 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஒரு முழுமைத் தொகுதியில், $\mu = 50''$ $\sigma = 3$; 500 பேர் கொண்ட அதனது ஒரு மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் 4·5 எனில், திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு சிறப்புடையதா ?

$$T = \frac{|4 \cdot 5 - 3|}{\frac{3}{\sqrt{1000}}} = \frac{(1 \cdot 5) \times 31 \cdot 6}{3}$$

$$= 15 \cdot 8$$

$\therefore$ 5% சிறப்பு வரம்பில் வேறுபாடு சிறப்புடையது.

5. இரண்டு திட்ட விலக்கங்களுக்குமிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பு

(i) ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரு சார்பிலாத இயைபிலா மாதிரிகள் பிறந்தால் அம் மாதிரிகளின் திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாட்டின் சிறப்பு.

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $= \sigma$

முதல் ஒரு மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S_1$ என்க.

அதன் உருவ அளவு $= n_1$ என்க.

2ஆவது மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S_2$ என்க.

அதன் உருவ அளவு $= n_2$ என்க.

திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு $(D) = S_1 - S_2$

$$(S_1 - S_2)\text{-வின் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2n_1} + \frac{\sigma^2}{2n_2}}$$

$$\text{அதாவது } \sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2n_1} + \frac{\sigma^2}{2n_2}} = \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{|D|}{\sigma_D} = \frac{|S_1 - S_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}}$$

குறிப்பு :

σ அறியப்படா நிலையில் அதன் மதிப்பீட்டாக

$$\sqrt{\frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2}} \text{ ஐக் கொள்ளலாம்.}$$

இங்கு

$$T = \frac{|S_1 - S_2|}{\sqrt{\frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2}} \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}}$$

$T > 1{\cdot}96$ எனில், 5% சிறப்பு வரம்பில் வேறுபாடு சிறப்புடையது. சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும்.

(ii) இரு மாதிரிகளும் வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிறந்தால்,

$$T = \frac{|S_1 - S_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n_1} + \frac{\sigma_2^2}{2n_2}}}$$

இங்கு σ_1 என்பது n_1 உருவ அளவுள்ள மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் σ_2 என்பது n_2 உருவ அளவுள்ள மாதிரி (2ஆவது) பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்.

குறிப்பு :

σ_1, σ_2 அறியப்படாவிட்டால் அவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே S_1 S_2 ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தாலம்.

எனவே,

$$T = \frac{|S_1 - S_2|}{\sqrt{\frac{2n_1}{S_1^2} + \frac{S_2^2}{2n_2}}}$$

$T > 1 \cdot 96$ எனில் சூனிய எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கருத்து நிலை வாத சோதனையில் (Abstract reasoning test) 90, 12ஆவது வகுப்பு மாணவர்களும் (மாதிரி 1.) 100, 12ஆவது வகுப்பு மாணவிகளும் (மாதிரி 2) பெற்ற மதிப்புகள் வருமாறு :

	n	S
மாணவர்கள்	90	11
மாணவிகள்	100	7

திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடான 4(11−7) 1% சிறப்பு வரம்பில் சிறப்புடையதா எனக் காண்க.

வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டதால்

$$T = \frac{|S_1 - |_2 S}{\sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}}$$

$$= \frac{|11-7|}{\sqrt{\frac{11^2}{2 \times 90} + \frac{7^2}{2 \times 100}}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\cdot 67 + \cdot 25}}$$

$$= \frac{4}{\cdot 96} = 4 \cdot 2$$

கண்டறிந்த T $(= 4 \cdot 2) > 2 \cdot 58$ஆக இருப்பதால், திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு 1% சிறப்பு வரம்பில் சிறப்புடையதாக இருக்கிறது. எனவே, எடுத்துக்கொண்ட கருத்து நிலை

வாத சோதனைகளில் மாணவிகளைவிட மாணவர்களுள் அதிக மாறுபாடு இருக்கின்றது.

6. முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழுவிற்கும், மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழுவிற்கும் உள்ள வேறுபாடு

கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கும் 'n' உருவ அளவுள்ள பல மாதிரிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கொண்டு ஓர் அலைவுப்பரவல் அமைத்தால், அப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் $\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}}$ (இங்கு ρ (ரோ) என்பது முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழு) ஆகும். அப பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும்.

முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழு $= \rho$

மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு $= r$

$\therefore$ வேறுபாடு $(D) = r-\rho$

r-ன் திட்டப் பிழை $= \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}} \backsim \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$ (n பெரியதாகையால்)

$$\therefore \quad T = \frac{|r-\rho|}{\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}}$$

மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு மிகப் பெரியதாகவோ அல்லது மிகச் சிறியதாகவோ அமைந்தால் ஃபிஷரின் Z–சோதனையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$Z = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+r}{1-r}$$

$$Z' = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho}{1-\rho}$$

Z-ன் திட்ட விலக்கம் $= \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

Z' நிலை உறுப்பு ஆதலால் $(Z - Z')$-ன் திட்ட விலக்கமும் $\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ ஆகும்.

எனவே,

$$T = \frac{|Z - Z'|}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

$$= |Z - Z'| \sqrt{n-3}$$

$T > 1{\cdot}96$ எனில், 5% சிறப்பு வரம்பில் வேறுபாடு சிறப்புடையது.

7. இரு மாதிரிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் வேறுபாட்டின் சிறப்பு

r_1, r_2 என்பன இரு உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் வேறுபாட்டின் சிறப்பைக் காண வேண்டும்.

முதல் மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு $= r_1$

அதன் உருவ அளவு $= n_1$

2ஆவது மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு $= r_2$

அதன் உருவ அளவு $= n_2$

வேறுபாடு $(D) = r_1 - r_2$

$(r_1 - r_2)$-ன் சிறப்பை அறிய Z சோதனையைப் பயன்படுத்துவோம். குறிப்பாக மாதிரிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுக்கள் மிகப் பெரியதாக அமைந்தால் Z சோதனை மிகவும் பயனுள்ளதாக அமைகிறது.

$$Z_1 = \tfrac{1}{2} \log_e \frac{1 + r_1}{1 - r_2}$$

$$Z_2 = \tfrac{1}{2} \log_e \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

$$(Z_1 - Z_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{|Z_1 - Z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$

$T > 1.96$ எனில், வேறுபாடு 5% வரம்பில் சிறப்புடையது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கல்லூரி *A*-ல் புகுமுக வகுப்பில் படிக்கும் மாணவர்களின் (தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்கள் $n_1 = 400$) நுண்ணறிவிற்கும் சாதனைக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு $(r_1) = \cdot 4$. கல்லூரி *B*-ல் அதே வகுப்பில் படிக்கும் மாணவர்களின் ($n_2 = 600$) நுண்ணறிவிற்கும் சாதனைக்குமிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு 0·5. நுண்ணறிவிற்கும் சாதனைக்கும் இடையேயுள்ள கல்லூரி தொடர்பில் *A*-க்கும் கல்லூரி *B*-க்கும் வேறுபாடு இருக்கிறதா என ஆய்க.

$$r_1 = \cdot 4 \qquad r_2 = .5$$

$$n_1 = 400 \qquad n_2 = 600$$

$$Z_1 = \tfrac{1}{2} \log e \ \frac{1 + .4}{1 - .4} = .42$$

$$Z_2 = \tfrac{1}{2} \log e \ \frac{1 + \cdot 5}{1 - .5} = .55$$

$$| Z_1 - Z_2 | = | \cdot 42 - .55 | = \cdot 13$$

$$(Z_1 - Z_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{1}{400-3} + \frac{1}{600-3}}$$

$$= .07$$

$$\therefore \quad T = \frac{.13}{.07} = 1.86$$

கண்டறிந்த $T(=1.86) < 1.96$ ஆக இருப்பதால், வேறுபாடு $(r_1 - r_2)$ 5% வரம்பில் சிறப்புடையதன்று. நுண்ணறிவிற்கும், சாதனைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பில் கல்லூரி A-க்கும் கல்லூரி *B*-க்கும் வேறுபாடு இல்லை.

8. மாதிரி விகித சமத்திற்கும் (Proportion) முழுமைத் தொகுதியின் விகித சமத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பு

விகித சமங்களை அல்லது வீதங்களை ஒப்பு நோக்கிச் சோதனைசெய்வது நடைமுறையில் அதிகப் பயனளிக்கவல்லது. n சோதனைகளில் f வெற்றிகளுக்குரிய ஊக அளவை $(q+p)^n$

ஈருறுப்புப் தொடர் உறுப்புகள் தருகின்றன என முன்பே கண்டோம். $p' = \frac{f_i}{n}$ என்ற வீதத்தின் திட்டப் பிழை $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ (இதில் $q = 1 - p$)

n என்பது மாதிரியின் உருவ அளவு

P என்பது கொடுக்கப்பட்ட வீதம் (முழுமைத் தொகுதி வீதம்)

$$\therefore \quad T = \frac{|p' - P|}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \quad [T \rightarrow N(0, 1)]$$

$T > 1.96$ எனில் வேறுபாடு 5% வரம்பில் சிறப்புடையது.

9. வீதங்களுக்கிடையே வேறுபாட்டின் சிறப்பு

(i) இரு சார்பிலா மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியில் பிறந்தன.

முதல் மாதிரியின் வீதம் $= p_1$

அதன் உருவ அளவு $= n_1$

இரண்டாவது மாதிரியின் வீதம் $= p_2$

அதன் உருவ அளவு $= n_2$

வீதங்களின் வேறுபாடு $= p_1 - p_2$

$(p_1 - p_2)$-ன் திட்டப் பிழை $= \sqrt{\frac{PQ}{n_1} + \frac{PQ}{n_2}}$ [இதில் P என்பது முழுமைத் தொகுதியின் வீதம்; $(Q = 1 - P)$]

$$\therefore \quad T = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{PQ}{n_1} + \frac{PQ}{n_2}}}$$

$T > 1.96$ எனில், வேறுபாடு 5% வரம்பில் சிறப்புடையது.

குறிப்பு : முழுமைத் தொகுதியின் வீதம் (P) அறியப்படாவிட்டால், அதன் மதிப்பீடாக,

$$\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$ ஐக் கொள்ளலாம். $\hat{q} = 1 - \hat{P}$

எனவே,

$$T = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

$T > 1.96$ எனில், வேறுபாடு 5% வரம்பில் சிறப்புடையது.

(ii) இரு சார்பிலா மாதிரிகளும் வெவ்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பிறந்தால்,

$$T = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{P_1 Q_1}{n_1} + \frac{P_2 Q_2}{n_2}}}$$

ஆகும்.

இதில் P_1, P_2 ஆகியன முழுமைத் தொகுதிகளின் வீதங்களாகும்.

[**குறிப்பு :** முழுமைத் தொகுதியின் வீதங்கள் அறியப்படாத நிலையில்,

$$T = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

என அமையும்.

$T > 1.96$ எனில் வேறுபாடு ($p_1 - p_2$) 5% வரம்பில் சிறப்புடையதாகும்.]

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

துவக்கப்பள்ளி மாணவர்களிடையே ஏமாற்றும் பழக்கத்தைப் பற்றி ஆராய்ந்ததில், பணக்காரக் குடும்பத்தில் பிறந்தவர்கள் 180 பேர்களில் 50 பேர் ஏமாற்றும் பழக்கத்தையுடையவர்கள் ஆகவும், ஏழைக் குடும்பங்களைச் சார்ந்தவர்களில் 125 பேர்களில் 90 பேர் அப்பழக்கத்தையுடையவர்களாகவும் இருந்தனர். ஏமாற்றும் தன்மையில் இவ்விரு குழுக்களும் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வேறுபடுகின்றனவா?

H_0 : ஏமாற்றும் தன்மையில் இவ்விரு குழுக்களிடையே வேறுபாடு இல்லை.

இவ்விரு மாதிரிகளும் (ஏமாற்றும் தன்மையைக் குறித்து) ஒரேமுழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்ததாகக் கொள்வோம்.

முதல் மாதிரியில் ஏமாற்றும் பழக்கத்தையுடையவர்களின் வீதம் $(p_1) = \frac{50}{180}$

2ஆவது மாதிரியில் அத் தன்மையுடையவர்களின் வீதம் $(p_2) = \frac{90}{125}$

முதல் மாதிரியின் உருவ அளவு $= 180$

2ஆவது மாதிரியின் உருவ அளவு $= 125$

$$p = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2} = \frac{50+90}{305} = \frac{140}{305}$$

$$q = 1-p = \frac{165}{305};\ T = \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\frac{pq}{n_1}+\frac{pq}{n_2}}}$$

$$T = \frac{\left|\frac{50}{180}-\frac{90}{125}\right|}{\sqrt{\frac{140}{305}\times\frac{165}{305}\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{125}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{199}{450}}{\sqrt{\frac{77}{305\times75}}}$$

$$= \frac{199}{450}\times\frac{151\cdot24}{8\cdot77}$$

$$= 7\cdot626$$

T-ன் மதிப்பு $(=7\cdot626)$, $1\cdot96$ஐ விடப் பெரிதாக இருப்பதால், சூனிய எடுகோளை 5% வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, அவ்விரு குழுக்களிடையே வேறுபாடு இருக்கிறது.

5. நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence Interval)

கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையினால் ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்ததால், அந்த மாதிரியில் கிடைத்த மதிப்புகளைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் எந்தவொரு அளவையும் (Parameter) மதிப்பீடு செய்யலாம். மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கு ஒரு மதிப்பீடு ஆகும். மாதிரியின் திட்ட விலக்கம், முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்திற்கு ஒரு மதிப்பீடு ஆகும். மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு, முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழுவிற்கு ஒரு மதிப்பீடாக அமையும். முழுமைத் தொகுதியின் தெரியாத ஓர் அளவையின் மதிப்பீடாக ஒரே மதிப்பினை வைத்துக்கொண்டு கூறினால், அந்த மதிப்பீடு முழுமைத் தொகுதியின் உண்மை மதிப்போடு ஒன்றுவது அரிது. ஒரு மாதிரியினின்று கிடைக்கின்ற மதிப்பு அந்த மாதிரி பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் அளவையின் சிறந்த மதிப்பீடாக இருப்பினும், அதுதான் சரியான மதிப்பு என்று உறுதியாகச் சொல்வதற்கில்லை. சரியான மதிப்பு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள் எங்காவது அமையலாம். எனவே, ஊக அளவையின் அடிப்படையில், முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் (கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், உடன் தொடர்புக் கெழு போன்றவை) எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமைகின்றன என்று கூறுவதே இடைவெளி மதிப்பீட்டு (Interval Estimation) முறையின் சிறப்பாகும்.

பல சமயங்களில் முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் நமக்குத் தெரியாது. அத்தகைய சமயங்களில் மாதிரியில் கிடைத்த விவரங்களைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செய்கிறோம். அல்லது அந்த அளவைகள் எந்த எல்லைகளுக்குட்பட்டு அமைகின்றன என்று வரையறை செய்கிறோம். இப்பொழுது பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறையினை விளக்குவோம். எடுத்துக் காட்டாக, இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி ஒன்றின் கூட்டுச் சராசரியான, μ-வை (μ-வின் மதிப்பு தெரியாது) நாம் மதிப்பீடு செய்ய முனைவதாக வைத்துக்கொள்வோம். இப்போது அந்த முழுமைத் தொகுதியினின்று எடுக்கப்பட்ட (ராண்டம் முறையில்) மாதிரியின் விவரங்களிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியை ($\bar{X}$ஐ) கணக்கிடுகிறோம். $\bar{X} = 21{\cdot}88$ என வைத்துக்கொள்வோம். $\bar{X}$-ன் மதிப்பையும், அதன் திட்டப்பிழையையும் பயன்படுத்தி ஊக அளவையின் அடிப்படையில், மாதிரி பிறந்த முழு

மைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி (μ) 24·92-லிருந்து 28·84-க்குள் விழும் என 95% நம்பிக்கையுடன் கூறுகிறோம். நாம் கூறும் கூற்றின் நம்பகம் 0.95 என்ற ஊக அளவைக் கெழுவினால் அளக்கப்படுகிறது. எனவே, 24·92ஐயும் 28·84ஐயும் 'நம்பிக்கை எல்லைகள்' (Confidence limits) எனவும், 24·92-லிருந்து 28·84 வரையான இடைவெளியை μ-வின் நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence Interval) எனவும், ·95ஐ 'நம்பிக்கை வரம்பு' (Confidence level) எனவும் வழங்குகின்றோம். 'முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி (மேற்குறிப்பிட்ட இடைவெளியில்) 24·92–லிருந்து 28·84-க்குள் விழும் என 95% நம்பிக்கையுடன் கூறுகிறோம்' என்ற சொற்றொடரை (கூற்றை) இப்போது விவரிப்போம்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியின் விவரங்களைக் கொண்டு கூட்டுச் சராசரியைக் ($\bar{X}$ஐக்) கணக்கிடுறோம். $\bar{X} = 25·68$ என்க. மேற்கூறியவாறு கணக்கிட்டு, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 23·72–க்கும் 27·64–க்கும் இடையில் இருக்கிறது எனக் கூறுகிறோம். இப்போது அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அதே உருவ அளவுடைய வேறொரு மாதிரியை ராண்டம் முறையில் எடுத்து அந்த மாதிரிக்கு $\bar{X}$ஐக் கணக்கிடுகிறோம். $\bar{X} = 24·22$ என்க. இப்போது மேற்கூறிய முறையில் கணக்கிட்டு, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 22·26–க்கும் 26·18–க்கும் இடையில் இருக்கும் எனக் கூறுகிறோம். இப்போது அடுத்தடுத்து எடுக்கப்பட்ட ஒரே உருவஅளவுடைய பல மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் $\bar{X}$ஐக் கணக்கிட்டு மேற்கூறிய முறையில் இடைவெளிகளை ஒவ்வொன்றுக்கும் அமைத்து, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி இரு எல்லைகளுக்கிடையில் இருக்கும் எனக் கூறுகிறோம். இவ்வாறு பல இடைவெளிகளை மேற்கூறியதையொத்த பல கூற்றுகளையும் ('முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி 24·92-லிருந்து 28·84–க்குள் விழும் என 95% நம்பிக்கையுடன் கூறுகிறோம்' போன்ற கூற்றுகள்) கூறுகிறோம். ஆனால், ஒவ்வொன்றிலும் எல்லைகள் வேறுபடுகின்றன. 95% நம்பிக்கையுடன் கூறுகிறோம் என்பதின் பொருள், 'மேற்கண்டவாறு கூறிய கூற்றுகளில் 95% கூற்றுகள் சரியானவைகளாகவும் 5% கூற்றுகள் தவறானவைகளாகவும் அமைகின்றன என எதிர்பார்க்கிறோம்,' என்பதேயாகும். மேற்கூறியவாறு அமைக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில் 95% சதவீதம் இடைவெளிகளில் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி அடங்கியிருக்கும் எனவும், 5% இடைவெளிகளில் அது விழாமல்

இருக்கும் எனவும் எதிர்பார்க்கிறோம். மேலே கண்ட, 0·05 என்ற ஊக அளவைக்குப் பதிலாக வேறு ஊக அளவைக் கெழுக்களைப் பயன்படுத்தி நம்பிக்கை இடைவெளிகளை (கூட்டுச் சராசரிக்கு) அமைக்கலாம். முழுமைத் தொகுதியின் மற்றைய அளவைகளுக்கும் நம்பிக்கை இடைவெளிகளை அமைக்கலாம். இங்கே மாதிரியின் உருவ அளவு பெரியதாக ($n>30$) அமையவேண்டும். அதாவது மாதிரிப் பரவல் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையவேண்டும். ஆனால் மாதிரியின் உருவ அளவு சிறியதாக இருந்தாலும், நம்பிக்கை இடைவெளிகளை அமைக்கமுடியும்.

கூட்டுச் சராசரியின் (μ-வின்) நம்பிக்கை இடைவெளி :

மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{X}$

மாதிரியின் உருவ அளவு $= n$

$\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை (திட்ட விலக்கம்) $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (இங்கு σ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்)

$\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை $= \frac{S}{\sqrt{n}}$ (σ அறியப்படா நிலையில், மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் Sஐப் பயன்படுத்த வேண்டும்)

μ-வின் நம்பிக்கை இடைவெளி =

[$\bar{X} - Z_c \times$ ($\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை)]-லிருந்து [$\bar{X} + Z_c \times$ ($\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை)] வரை.

அதாவது $\bar{X} \pm Z_c \, \sigma_{\bar{X}}$

இங்கு $\sigma_{\bar{X}} =$ $\bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை

Z_c என்பது கொடுக்கப்பட்ட நம்பிக்கை வரம்பில், இயல்நிலைப் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து கண்ட மதிப்பு.

μ-ன் 95% நம்பிக்கை வரம்பில் நம்பிக்கை இடைவெளி

$$= \left(\bar{X} - 1{\cdot}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\text{-லிருந்து} \left(\bar{X} + 1{\cdot}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\text{வரை.}$$

எனவே நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\left(\bar{X} - 1{\cdot}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1{\cdot}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

99% (·99) நம்பிக்கை வரம்பில் நம்பிக்கை இடைவெளி

$= \left(\bar{X} - 2\ 58\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right.$ லிருந்து $\left(\bar{X} + 2{\cdot}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ வரை.

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தின் (σ-ன்) நம்பிக்கை இடைவெளி :

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $= \sigma$

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S$

மாதிரியின் உருவ அளவு $= n$

(σ_s) S-ன் திட்டப் பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

(σ_s) S-ன் திட்டப் பிழை $= \frac{S}{\sqrt{2n}}$

(σ அறியப்படா நிலையில்)

σ-ன் நம்பிக்கை இடைவெளி =

$(S - Z_C\ \sigma_s)$-லிருந்து $(S + Z_C\ \sigma_S)$ வரை

அதாவது,

$\left(S - Z_C\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$-லிருந்து $\left(S + Z_C\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$ வரை

σ-ன் 99% நம்பிக்கை வரம்பில் நம்பிக்கை இடைவெளி =

$\left(S - 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$-லிருந்து $\left(S + 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$

99% நம்பிக்கை எல்லைகள் =

$$\left(S - 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right), \left(S + 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$$

σ-ன் 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் =

$$\left(S - 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}},\ S + 1{\cdot}96\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$$

முழுமைத் தொகுதியின் மற்றைய அளவைகளுக்கும் மேலே கண்டதையொத்த முறையில் நம்பிக்கை எல்லைகளைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

100 பள்ளி மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறை தேர்ந்தெடுத்தது ஆகும். அம் மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழு 114; திட்ட விலக்கம் 17 எனில் முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவுக் கெழுவின் 95%, 99% நம்பிக்கை இடைவெளிகளைக் காண்க.

மாதிரியின் உருவ அளவு $(n) = 100$

மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $(\overline{X}) = 114$

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $(S) = 17$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் தெரியாததால்,

$\overline{X}$-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{S}{\sqrt{n}} = \dfrac{17}{\sqrt{100}} = 1.70$

எனவே, முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரியின் 95%

நம்பிக்கை இடைவெளி $= \left(\overline{X} - 1.96 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$-லிருந்து

$\left(\overline{X} + 1.96 \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$ வரை

$= (114 - 1.96 \times 1.70)$-லிருந்து $(114 + 1.96 \times 1.70)$ வரை

$= (114 - 3.33)$ $(114 + 3.33)$ வரை

$= 110{\cdot}67$லிருந்து 117.33 வரை

99% நம்பிக்கை இடைவெளி $= \left(\overline{X} - 2.58 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$-லிருந்து

$\left(\overline{X} + 2.58 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$ வரை

$= (114 - 2.58 \times 1.70)$-லிருந்து $(114 + 2.58 \times 1.70)$ வரை

$= 109.61$-லிருந்து 118.39 வரை

பயிற்சி 10

(1) 100 பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 90. அவர்களின் திட்ட விலக்கம் 10. 'இந்த மாதிரி, கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 92ஐக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பிறந்ததா' என ஆய்க.

(2) ஒரு புத்திக் கூர்மை சோதனையில், முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்க மதிப்பு 35. அதே சோதனையில், 300 பையன்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பு 130; அதே போல 150 பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பு 135. எனில், இவ்விரண்டு குழுக்களிலும் பொருட்படுத்தும் அளவிற்குப் புத்திக் கூர்மை வேறுபடுகிறதா என ஆய்க.

(3) 100 அம்சங்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் 4. திட்ட விலக்கம் 4.2 ஆகக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இந்த மாதிரி பிறந்ததுதானு என ஆய்க.

(4) ஒரு மாதிரியின் உரு அளவு 1000. அதன் திட்ட விலக்கம் 2.5; மற்ருெரு மாதிரியின் உருவ அளவு 500. அதன் திட்ட விலக்கம் 2.4 எனில், மாதிரிகளின் திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு சிறப்புடையதா?

(5) ஒரு போட்டித் தேர்வில் 100 மாணவர்களில் 40 பேர் தேர்வு பெற்றனர்; மற்ருெரு குழுவிலுள்ள 120 மாணவர்களில் 50 மாணவர்கள் தேர்வு பெற்றனர். இவ்விரண்டு குழுக்களிடையே வேறுபாடு சிறப்புடையதா?

(6) 120 உருவ அளவு கொண்ட ஒரு மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு .5· முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழு .52. எனில் உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் வேறுபாடு சிறப்புடையதா?

(7) 147 உருவ அளவு கொண்ட ஒரு மாதிரியில் உளவியல் சோதனை மதிப்புகளுக்கும் கல்வி சாதனை சோதனை மதிப்புகளுக்குமிடைதயயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு ·40 125 உருவ அளவு கொண்ட மற்ருெரு மாதியில் சோதனை மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு ·59 எனில் உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் வேறுபாடு சிறப்புடையதா?

(8) 40 உருவ அளவு கொண்ட ஒரு மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி 40.6; திட்ட விலக்கம் 8 எனில், முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரியின் 95%; 99% நம்பிக்கை இடைவெளிகளைக் காண்க.

(9) ஒரு துவக்கப் பள்ளியில் எழுத்துக் கூட்டுச் சோதனையில் 32 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பு 72; திட்ட விலக்கம் 8. அதே சோதனையில் 36 மாணவிகளின் கூட்டுச் சரர்சரி மதிப்பு 75; திட்ட விலக்கம் 6. மாணவர்களைவிட மாணவிகள் எழுத்துக் கூட்டுவதில் சிறந்தவர்களா என்பதனை 5% வரம்பில் சோதனை செய்க.

11. சிறிய மாதிரிகளும், சிறப்புக்காண் சோதனைகளும்

(Small samples and Tests of significance)

1. சிறிய மாதிரி

முந்தைய பக்கங்களில் கண்ட சிறப்புக்காண் சோதனைகளைப் பயன்படுத்துகையில், மாதிரியின் உருவ அளவு (n) அதிகரிக்கும்போது ($n \geq 30$) புள்ளி விவர மாதிரிப் பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகின்றன என்ற அடிப்படைக் கருத்தை மேற்கொண்டோம். ஒரு மாதிரியின் உருவ அளவு 30-க்குக் கீழானால் அந்த மாதிரியை சிறிய மாதிரி எனக் கருதலாம் என முன்பே கூறினோம். சிறிய மாதிரிகளிலிருந்து முடிவு எடுக்க வேண்டியிருக்கும் பொழுது, குறிப்பிட்ட முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி அளவைகளின் பரவல்கள் பற்றி திட்டவட்டமான செய்திகள் தெரிந்தால்தான் (சிறிய மாதிரியில், மாதிரியின் அளவை இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது எனக் கூற முடியாது) மேற்கொண்டு பொருத்தமான முடிவுகள் எடுப்பதற்கு இயலும். சிறிய மாதிரிகளில் மாதிரியின் அளவை எத்தகையப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது என்பதைப் பற்றி டபுள்யூ. எஸ். கோசெட் (W. S. Gosset) என்பவரும் ['ஸ்டூடன்ட்' (Student) என்ற புனைப் பெயராலும்], R. A. ஃபிஷர் என்பாரும் மற்றும் சிலரும் பல ஆராய்ச்சிகளைச் செய்து முடிவுகளைக் கொடுத்திருக்கின்றனர். இப்போது சிறிய மாதிரிகளில் சில சிறப்புக்காண் சோதனைகளைப் பற்றி விவரிப்போம். சிறிய மாதிரிகளில் காணும் சிறப்புக்காண் சோதனைகளைப் பெரிய மாதிரிகளுக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

2. வரையற்ற பாகைகள் (Degrees of freedom)

வரையற்ற பாகைகள் என்பது ஒரு மாறியின் மதிப்புகளில் தடையின்றி சுயேச்சையாக மாறுபடக் கூடியதாக அமையும் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையேயாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 11, 15, 7, 6, 6 ஆகிய ஐந்து மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி மதிப்புகளின் விலக்கங்கள் +2, +6, −2, −3, −3 ஆகும். கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி விவரங்களின் விலக்க கூடுதல் $[\Sigma(X_i - \bar{X}) = 0]$ பூச்சியமாதலால், மேற்கண்ட விலக்கங்களின் கூடுதல் $(-2+6-2-3-3=0)$ பூச்சியமாகும். எனவே இவ்விலக்கங்களில் (ஐந்து விலக்கங்களில்) எவையாலும் நான்கு விலக்கங்கள் தெரிந்திருந்தால் ஐந்தாவது விலக்கத்தைத் தீர்மானித்து விடலாம். எடுத்துக்காட்டாக +2, −2, −3, −3 ஆகிய நான்கு விலக்கங்கள் தெரிந்திருந்தால், ஐந்தாவது விலக்கத்தை கீழ்க்கண்டவாறு தீர்மானிக்லாம். தெரியாத விலக்கத்தை x என்க. ஐந்து விலக்கங்களின் கூடுதல் பூச்சியம் என நமக்கு தெரியும். எனவே,

$$+2, -2-3+x = 0$$

$$\text{அதாவது}, -6 + x = 0$$

$$x = 6$$

எனவே ஐந்தாவது விலக்கம் 6 ஆகும். ஆகவே மேற்கண்ட ஐந்து விலக்கங்களில் எவையாகிலும் நான்கு விலக்கங்கள் மட்டுமே தடையின்றி சுயேச்சையாக மாறும். ஆனால், மீதியுள்ள ஒரு விலக்கம் மற்ற 4 விலக்கங்களைச் சார்ந்திருக்கும். எனவே, வரையற்ற பாகைகள் 5 − 1 = 4 ஆகும். இதனைப் பொதுவாகக் கூறலாம்; $X_1\ X_2, \ldots X_n$ என்பன n மதிப்புகள் என்க. இவற்றின் கூட்டுச் சராசரியை $\bar{X}$ என்க. $\bar{X}$-லிருந்து கண்ட விலக்கங்களின் கூடுதல் $(X_1 - \bar{X}) + (X_2 - \bar{X}) + \ldots + (X_n - \bar{X})$ ஆகும் இவ்விலக்கங்களில் கூடுதல் பூச்சியமாகும் என்பதால், $\bar{X}$-ம், $X_1\ X_2\ X_n$ ஆகிய மதிப்புகளில் ஏதாகிலும், $(n-1)$ மதிப்புகளும் தெரிந்திருந்தால் மீதியுள்ள ஒரு மதிப்பைத் தீர்மானித்து விடலாம். எனவே, இதில் வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $(n-1)$ ஆகும். மாதிரியிலுள்ள n விவரங்களேயன்றி முழுமைத் தொகுதியைக் குறித்து வேறு செய்திகள் இல்லாத நிலையில் முழுமைத் தொகுதியின் K அளவைகளை (Parameters) மதிப்பீடு செய்தால், K வரையற்ற பாகைகளை இழந்து விடு

கிறோம். எனவே, இப்பொழுது வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $(n - K)$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியான μஐத் தெரியாத நிலையில் (μஐயும் மதிப்பிட வேண்டியிருந்து) முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டான σ^2ஐ மதிப்பீடு செய்தால் ஒரு வரையற்ற பாகையை இழந்து விடுகிறோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் எண்ணிக்கை n எனில், இங்கு வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $(n - 1)$ ஆகும். ஆனால், முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி நமக்குத் தெரிகின்ற நிலையில் (μஐ மதிப்பீடு செய்ய வேண்டாதிருப்பின்) முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டை மதிப்பீடு செய்தால், வரையற்ற பாகையை இழப்பதில்லை. எனவே, இங்கு வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை n ஆகும்.

3. 'ஸ்டூடண்ட் 't' பரவல்'

ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியின் μ என்க; இதிலிருந்து பிறந்த மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியை $\overline{X}$ என்க; மாதிரியின் உருவ அளவு n $(n < 30)$ என்க; மாதிரியின் திட்ட விலக்கத்தை S என்க; எனில்,

கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாடு $= \overline{X} - \mu$

மேலும்,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

$$= \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n-1}}{S}$$

என்ற அளவை பற்றி இப்போது காண்போம்.

ஓர் இயல்நிலை (இயல்நிலையை நெருங்கிய) முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 'n' உருவ அளவுடைய பல மாதிரிகளை அடுத்தடுத்து தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு மாதிரியிலிருந்தும் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிட்டு, t என்ற அளவையும் கணக்கிட்டால் எல்லா மாதிரிகளிலும் கண்ட t-ன் மதிப்புகளைக் கொண்டு ஓர் அலைவுப் பரவல் அமைக்கலாம். இவ்வாறு அமைத்த t-ன் பரவலை 'ஸ்டூடண்ட் 't' பரவல்' (Student 't' distribuition) என்கிறோம். t என்பதின்

மாதிரிப் பரவல், அதாவது t பரவல் மாதிரி முறையின் அடிப் படைக் கருவிகளில் ஒன்றாகும்.

n என்பது 30-க்குப் பெரிதாக இருக்குமானால், t என் பதை இயல்நிலையாகக் கொள்வதில் அதிகப் பிழை நேராது; ஆனால், n என்பது 30-க்குக் கீழ் இருக்கும் பொழுது t இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றாது; t என்பது $(n-1)$ வரை யற்ற பாகைகளையுடைய t பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

பெரிய மாதிரிகளில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கும் மாதிரியின் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பைச் சோதனை செய்ய,

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ ஐக் கணக்கிடும் போது σ-வை (முழு மைத் தொகுதியின் விலக்கத்தை) பயன்படுத்துகிறோம். σ தெரியாத போது மாதிரியின் திட்ட விலக்கமான Sஐப் பயன் படுத்துகிறோம். (அதில் S என்பது σ-க்குத் திருத்தமான மதிப் பீடாகாது). ஆனால் t-ன் கணிப்பில் மாதிரின் திட்ட விலக்கம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

t பரவலை செயல் முறையில் பயன்படுத்துவதற்கு வசதி யாக முன்கூட்டியே தயாரித்த பட்டியல் இருக்கிறது. அத்த கைய பட்டியல் பிற்சேர்க்கையில் பட்டியல் C (t பட்டியல் என்ற தலைப்பில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மாறுபாடும் n-ன் மதிப்பு (வரையற்ற பாகைகளுக்கு), .01, .05 போன்ற சில குறிப்பிட்ட ஊக அளவைகளுக்கு இசைந்த (சிறப்பு வரம்புகளின் அடிப் படையில்) t-க்கான மதிப்புகள் பதிவு செய்யப்பட்ட எண்கள் தெரிவிக்கின்றன. கொடுக்கப்பட்ட வரையற்ற பாகைகளுக்கு கண்டறிந்த t-ன் மதிப்புக்குரிய ஊக அளவை .05-க்கு (5% சிறப்பு வரம்பைப் பயன்படுத்தினால்) அதிகமானால் சூனிய எடு கோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது. அதாவது t-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு, .05 சிறப்பு வரம்பில் t பட்டி யலின் மதிப்பினும் பெரியதாக இருந்தால், சூனிய எடு கோளைத் தள்ளுபடி செய்ய வேண்டும். எடுத்துக்காட் டாக, வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆக இருக் கும்போது .01 என்ற ஊக அளவைக்கு இசைந்ததாக t-க்கு 3.71 என்ற மதிப்பு இருக்கிறது. அதாவது $n = 6$ என்ற வரிசை யில் .01 தலைப்பிடப்பட்ட பத்தியில் அந்த (3.71) மதிப்பினைக்

காண்கிறோம். எனவே கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு, 3.71ஐ விடப் பெரியதாக இருந்தால், சூனிய எடுகோளை 1% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம்.

சிறிய மாதிரிகளில் சில சிறப்புக்காண் சோதனைகள்

1. முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு

(இயல்நிலை) முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $=\mu$ என்க

மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \overline{X}$ என்க

அந்த மாதிரியின் உருவ அளவு $= n \ (n < 30)$

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S$

கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாடு $= \overline{X} - \mu$

$(\overline{X} - \mu)$-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$

$$\therefore \ t = \frac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

$$= \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n-1}}{S}$$

சூனிய எடுகோள் (H_0): முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும், மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் வேறுபாடு இல்லை.

சூனிய எடுகோள் உண்மையானால், இந்த t, $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளையுடைய 't' பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

$\therefore$ $(n-1)$ வரையற்ற பாகையில் இந்த $|t|$-ன் மதிப்பு, எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில், t பட்டியல் மதிப்பினும் பெரியதாக இருந்தால் சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரிக்குமுள்ள வேறுபாடு, எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில் (பொதுவாக ·05 அல்லது ·01ஐக் கொள்ளலாம்), $(n-1)$ வரையற்ற பாகையில்

சிறப்புடையதாகும். ஆகவே, சராசரிகளிடையே வேறுபாடு இருக்கிறது எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஒரு கல்லூரியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் 10 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுத்து அவர்களின் உயரத்தை அளந்ததில் கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் கிடைத்தன. அந்தக் கல்லூரியிலுள்ள எல்லா மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் 66″ எனில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்திற்கும், எல்லா மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்திற்கும் வேறுபாடு உண்டா எனக் காண்க.

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5
உயரம் (அங்குலத்தில்)	63	63	66	67	68
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	7	8	9	10
உயரம் (அங்குலத்தில்)	69	70	70	71	71

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி = 66

மாதிரியின் உருவ அளவு = 10 (சிறிய மாதிரி)

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	உயரம் அங். x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
1	63	—4·8	23·04
2	63	—4.8	23·04
3	66	—1·8	3·24
4	67	— ·8	·64
5	68	·2	·04
6	69	1·2	1·44
7	70	2·2	4·84
8	70	2·2	4·84
9	71	3·2	10·24
10	71	3·2	10·24
மொத்தம் ...	$\sum x=678$	மொத்தம் ...	$\sum(x-\bar{x})^2$ = 81·60

மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{678}{10} = 67{\cdot}8''$

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{81{\cdot}60}{10}} = \sqrt{8{\cdot}16}$$

$$= 2{\cdot}86''$$

$$\mu = 66$$
$$\bar{X} = 67{\cdot}8$$
$$n = 10$$
$$S = 2{\cdot}86$$

$$\therefore \quad t = \frac{|\bar{X}-\mu|}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{|\bar{X}-\mu|\sqrt{n-1}}{S}$$

$$= \frac{|67{\cdot}8-66|\times\sqrt{10-1}}{2{\cdot}86} = \frac{1{\cdot}8\times\sqrt{9}}{2{\cdot}86}$$

$$= \frac{1{\cdot}8\times{\cdot}3}{2{\cdot}86} = \frac{5{\cdot}4}{2{\cdot}86}$$

$$= 1{\cdot}89.$$

H_0 : $\bar{X}$-க்கும், μ-க்கும் வேறுபாடு இல்லை.

(அதாவது, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்திற்கும், கல்லூரியிலுள்ள எல்லா மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்திற்கும் வேறுபாடு இல்லை).

வரையற்ற பாகைகள் = (விவரங்களின் எண்ணிக்கை—1)

விவரங்களின் எண்ணிக்கை = 10 = n (மாதிரியின் உருவ அளவு)

வரையற்ற பாகைகள் $= n-1 = 10-1$

$$= 9.$$

எனவே, 9 வரையற்ற பாகையில், ·05 சிறப்பு வரம்பில், t பட்டியலின் மதிப்பு 2·26 ஆகும். ஆகவே, கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு

(1·89), t பட்டியலின் மதிப்பை (2·26)விடக் குறைவாக இருப்பதால் ·05 சிறப்பு வரம்பில் எடுகோளை (H_0ஐ) ஏற்றுக்கொள்கிறோம். எனவே, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்திற்கும், எல்லா மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்திற்கும் வேறுபாடு கிடையாது (5% வரம்பில்).

2. இரு சிறிய மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாட்டின் சிறப்பு ($\sigma_1 = \sigma_2$ஆக இருந்தால்)

இரண்டு சிறிய மாதிரிகளின் சராசரிகளை ஒப்பிட்டு, அம் மாதிரிகளின் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனவா என்ற எடுகோளைச் சோதனைச் செய்ய t பரவலைப் பயன்படுத்தலாம்.

திட்ட விலக்கங்கள் (σ_1, σ_2) சமமாகவுள்ள இரண்டு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து இரு சார்பிலா மாதிரிகள் (Independent samples) ராண்டம் முறைகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

முதல் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{X}_1$

முதல் மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S_1$

முதல் மாதிரியின் உருவ அளவு $= n_1$

இரண்டாம் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{X}_2$

,, ,, திட்ட விலக்கம் $= S_2$

,, ,, உருவ அளவு $= n_2$

H_0 : இரு மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளிடையே வேறுபாடு இல்லை. (முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளிடையே வேறுபாடு இல்லை என்பதாகும்).

சூனிய எடுகோள் (H_0) உண்மையானால்,

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}, \text{ இங்கு } S = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

இந்த t–யானது $(n_1 + n_2 - 2)$ வரையற்ற பாகைகளை யுடைய 't' பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

எனவே,

$$t = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

இங்கு,

$$S = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

என்ற அளவைக் கொண்டு இரு சராசரிகளது வேறுபாட்டின் சிறப்பை அறியலாம். சூனிய எடுகோளை ஏற்பதாக அமைந்தால், முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் சமம் எனவாகும். முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் சமம் எனப் புனைந்து கொண்டதால், அவ்விரு முழுமைத் தொகுதிகளும் (சமம்) ஒரே மாதிரியானவைகளாகும்.

மேலே கண்ட t-ன் மதிப்பு, $(n_1 + n_2 - 2)$ வரையற்ற பாகைகளையுடைய (எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில்) t பட்டியல் மதிப்பினைவிடப் பெரியதாக இருந்தால், சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, சராசரிகளிடையே வேறுபாடு இருக்கிறது எனக் கூறுகிறோம். அதாவது, அவ்விரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்தவை எனக் கூற முடியாது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

செய்முறை பிராணி (Experimental animals)களைக் கொண்ட இரு குழுக்களுக்காக, சிக்கலறைச் சோதனையில் வேறுபட்ட இரு செய்முறை சூழ்நிலைகளில் கண்டறிந்த பிழை மதிப்புகள் வருமாறு :

குழு A :	16	9	4	23	19	10	5	2
குழு B :	20	5	1	16	2	4		

இவ்விரண்டு செய்முறை சூழ்நிலைகளின் விளைவாகப் பிராணிகளின் நடத்தையில் (பிழைகள் செய்வதில்) வேறுபாடு இருக்கிறதா எனக் காண்க.

குழு A (முதல் சூழ்நிலையில்)	குழு B (வேறொரு சூழ்நிலையில்)		
X_1	X_2	$(X_1-\overline{X_1})^2$	$(X_2-\overline{X_2})^2$
16	20	25	144
9	5	4	9
4	1	49	49
23	16	144	64
19	2	64	36
10	4	1	16
5		36	
2		81	
$\Sigma X_1 = 88$	மொத்தம் $\Sigma X_2 = 48$	404	318

$n_1 = 8$ $\qquad$ $n_2 = 6$

$\overline{X_1} = \frac{88}{8} = 11$ $\qquad$ $\overline{X_2} = \frac{48}{6} = 8$

$\Sigma (X_1 - \overline{X_1})^2 = 404$ $\qquad$ $\Sigma (X_2 - \overline{X_2})^2 = 318$

$$S_1^2 = \frac{404}{8} = 50.5$$

$$S_2^2 = \frac{318}{6} = 53$$

$$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{8 \times 50.5 + 6 \times 53}{8 + 6 - 2}$$

$$= \frac{404 + 318}{12}$$

$$= 60.17$$

$$\therefore \quad t = \frac{|\overline{X}_1 - \overline{X}_2|}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n2}}}$$

$$= \frac{|11 - 8|}{\sqrt{60.17}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}} \qquad \frac{3}{\sqrt{60.17}\sqrt{\frac{14}{48}}}$$

$$= .72$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில், வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $= n_1 + n_2 - 2$

$$= 8 + 6 - 2 = 12$$

12 வரையற்ற பாகைகளுக்கு t பட்டியலின் மதிப்பு (5% சிறப்பு வரம்பில்) = 2.18

கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு (.72) t பட்டியலின் மதிப்பை (2.58)விடச் சிறியதாக இருப்பதால். சூனிய எடுகோளை(இரண்டு வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளின் விளைவாக நடத்தையில் வேறுபாடு இல்லை) ஏற்றுக் கொள்கிறோம். எனவே, சூழ்நிலைகளின் விளைவாகத்தான் பிராணிகளின் நடத்தையில் (பிழைகள் செய்வதில்) வேறுபாடு இருக்கிறது எனக் கூற முடியாது.

3. இரு சிறிய மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாடு ($\sigma_1 \neq \sigma_2$ யெனில்)

திட்ட விலக்கங்கள் (σ_1 σ_2) சமமாக இல்லாத இரண்டு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து இரு சார்பிலா மாதிரிகள் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

முதல் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $= \overline{X}_1$

,, ,, திட்ட விலக்கம் $= S_1$

,, ,, உருவ அளவு $= n_1$

இரண்டாம்மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி$= X_2$

,, ,, திட்ட விலக்கம் $= S_1$

,, ,, உருவ அளவு $= n_1$

$$t_0 = \frac{|X_1 - X_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}}$$

இந்த t_0ஆனது 't' பரவலைப் பின்பற்றுது. ஆனால், கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் சிறப்பைச் சோதனை செய்ய கீழே தரப்பட்ட முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$(n_1 - 1)$ வரையற்ற பாகைகளையுடைய, எடுத்துக் கொண்ட சிறப்பு வரம்பில் (.05 என்க) t பட்டியலின் மதிப்பைக் காண்க. பட்டியலின் மதிப்பை t_1 என்க.

$(n_2 - 1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட, எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில் (.05 என்க), t பட்டியலின் மதிப்பைக் காண்க. படடியலின் மதிப்பை t_2 என்க.

இப்போது,

$$t.05 = \frac{t_1 \times \frac{S_1^2}{n_1 - 1} + t_2 + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}$$

கண்டறிந்த t_0-ன் மதிப்பு $t._{05}$ஐவிடப் பெரியதாக இருந்தால், சூனிய எடுகோளை (சராசரிகளிடையே வேறுபாடு இல்லை என்பதை) தள்ளுபடி செய்யவேண்டும். (எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில் — .05 என்க).

4. இரு சிறு மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாடு (ஒரே குழுவிலிருந்து கண்டறிந்த மதிப்புகளின் வேறுபாடுகளைக் கொண்டு அவ் வேறுபாடுகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் O-விற்கு முள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பு)

ஒரே மாதிரியில் கண்ட 'n' மதிப்புகளை $X_1, X_2 \ldots X_n$ என்க. அதே குழுவில் இரண்டாவது தடவையில் கண்டறிந்த 'n' மதிப்புகளை $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ என்க.

சோடி மதிப்புகளின் வேறுபாடுகள்

$$d = (X_1 - Y_1)\ (X_2 - Y),\ \ldots\ (X_n - Y_n)$$

$$\Sigma d = (X_1 - Y_1) + (X_2 - Y_2) + \ldots (X_n - Y_n)$$

$$\overline{d} = \frac{\Sigma d}{n}$$ (n=சோடி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை)

$$S^2 = \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2$$

$$\therefore \; t = \frac{\overline{d}}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}}$$

இந்த *t*-யானது '*t*' பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை ($n - 1$) ஆகும்.

எனவே,

கண்டறிந்த *t*-ன் மதிப்பு (*n*-1 வரையற்ற பாகைகளில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட வரம்பில்), *t* பட்டியலின் மதிப்பை விடப் பெரியதாக இருந்தால், சூன்ய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

பள்ளிவருட ஆரம்பத்தில் (நடத்தப்பட்ட ஒரு கல்விச் சாதனை சோதனையில் (வாசிப்புத் திறமையில்) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 5ஆவது வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்புகளும், பள்ளி வருட இறுதியில் அத்தகைய சோதனை அதே மாணவர்களுக்கு நடத்தப்பட்ட போது அவர்கள் பெற்ற மதிப்புகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அந்த ஒரு வருட காலத்தில் மாணவர்கள் வாசிப்பில் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு முன்னேற்றம் அடைந்துள்ளனரா என ஆய்க.

மாணவர்கள்	ஆரம்ப (முதல் சோதனை மதிப்புகள்	கடைசி சோதனை மதிப்புகள்
1	50	62
2	42	40
3	51	61
4	26	35
5	35	30
6	42	52
7	60	68
8	41	51
9	70	84
10	52	63
11	62	72
12	38	50

முதல் சோதனை மதிப்புகள் X	கடைசி சோதனை மதிப்புகள் Y	வேறுபாடு $X-y=d$	d^2
50	62	−12	144
42	40	2	4
51	61	−10	100
26	35	−9	81
35	30	5	25
42	52	−10	100
60	68	−8	64
41	51	−10	100
70	84	−14	196
55	63	−8	64
62	72	−10	100
38	50	−12	144
		$\Sigma d=-96$	$\Sigma d^2=1122$

$$\Sigma d = -96,\ n = 12,\ \Sigma d^2 = 1122$$

$$\bar{d} = \frac{-96}{12} = -8$$

$$S^2 = \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1122}{12} - \left(\frac{-96}{12}\right)^2$$

$$= 93 \cdot 5 - 64 = 29 \cdot 5$$

$$\therefore \quad t = \frac{|\bar{d}|}{\sqrt{\dfrac{S^2}{n-1}}} = \frac{|-8|}{\sqrt{\dfrac{29 \cdot 5}{11}}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2 \cdot 68}} = \frac{8}{1 \cdot 64}$$

$$= 4 \cdot 88$$

வரையற்ற பாகைகள் = 12−1 = 11.

கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு = (4·88)

பொருட்படுத்தும் அளவுக்கு மாணவர்கள் முன்னேற்றம் அடைந்துள்ளனரா என்பதைப்பற்றி ஆராய்வதால், இது ஓர் ஒரு முனைச் சோதனையாகும். (H_0 : $\mu_1 = \mu_2$: $H_1 = \mu_1 < \mu_2$) எனவே, 1% (=·01) சிறப்பு வரம்பில் [அல்லது 5% (=·05) சிறப்பு வரம்பில்], t பட்டியலின் ·02 [அல்லது 0·1 (=2×·05)] தலைப்பின்கீழ் 11 வரையற்ற பாகையின் வரிசையிலுள்ள மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

எனவே n=11 என்ற வரிசையில் 0·10 என்ற தலைப்பிட்ட பத்தியில் 1·80 என்ற மதிப்பைக் காண்கிறோம். அதேபோல் n=11 என்ற வரிசையில் ·02 என்ற தலைப்பிட்ட பத்தியில் 2·72 என்ற மதிப்பைக் காண்கிறோம்.

இது ஓர் ஒருமுனைச் சோதனையாதலால்,

11 வரையற்ற பாகைகளையுடைய t பட்டியலின் மதிப்பு 1·80 ஆகும் (· 5 சிறப்பு வரம்பில்).

·01 சிறப்பு வரம்பில், 11 வரையற்ற பாகைகளையுடைய t பட்டியலின் மதிப்பு 2·72 ஆகும்·

ஆகவே, கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு (4·88) t பட்டியலின் மதிப்பை விடப் பெரியதாக இருப்பதால் ·05 சிறப்பு வரம்பிலும் சூனிய எடு கோளைத் (வேறுபாடு இல்லை என்பதை) தள்ளுபடி செய்கிறோம்: மாற்று எடுகோளை (பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு முன்னேற்றம் அடைந்துள்ளனர் என்பதை) ஏற்றுக்கொள்கிறோம். எனவே, 5% வரம்பிலும், 1% வரம்பிலும், மாணவர்கள் அந்த ஒரு வருட காலத்தில் வாசிப்பில் முன்னேற்றம் அடைந்துள்ளனர் என்பதே நமது முடிவாகும்.

5. ஒரு சிறிய மாதிரியில் உடன் தொடர்புக் கெழுவின் சிறப்பு

முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழு = P என்க
அதிலிருந்து பிறந்த மாதிரியின் ,, ,, = r என்க

மாதிரியின் உருவ அளவு = n.

சூனிய எடுகோள் (H_o) : முழுமைத் தொகுதியின் உடன் தொடர்புக் கெழு பூச்சியமாகும். அதாவது $P=0$ என்பதாகும். H_o உண்மையானுல்,

$$t = \frac{r \times \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$ என்ற அளவை

$(n-2)$ வரையற்ற பாகைகளையுடைய 't' பரவலைப் பின்பற்று கிறது.

எனவே, கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு, $(n-2)$ வரையற்ற பாகை களையுடைய (எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில்) t பட்டிய லின் மதிப்பினும் பெரியதாக இருந்தால், சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 13 சோடி மதிப்புகள் கொண்ட மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0·6 எனில், 5% சிறப்பு வரம்பில் இந்த உடன் தொடர்புக் கெழு முக்கியமானதா (இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியில் மாறிகளி டையே பொருட்படுத்தும் அளவிற்குத் தொடர்பு உண்டா) எனக் காண்க.

$$H_o : P = 0$$

$$r = \cdot 6$$

$$n = 13$$

$$\therefore \quad t = \frac{\sqrt{n-2} \times r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{13-2} \times \cdot 6}{\sqrt{1-(\cdot 6)^2}}$$

$$= \sqrt{11} \times \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 317 \times 3}{4}$$

$$= 2 \cdot 488$$

வரையற்ற பாகைகள் $= n-2$

$$= 13-2=11.$$

11 வரையற்ற பாகைகளையுடைய (·05 வரம்பில்) t பட்டியலின் மதிப்பு = 2·20

எனவே, கண்டறிந்த t-ன் மதிப்பு (2.488) t பட்டியலின் மதிப்பை (2·20) விடப் பெரியதாக இருப்பதால், சூனிய எடுகோளைத்தள்ளு படி செய்கிறோம். ஆகவே, அந்த உடன் தொடர்புக் கெழு முக்கியமானது. அதாவது மாதிரி எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் மாறிகளிடையே பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு (5% சிறப்பு வரம்பில்) தொடர்பு உண்டு என்பதே முடிவாகும்.

4. கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை இடைவெளி (சிறிய மாதிரியில்)

n உருவ அளவுடைய சிறிய மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{X}$ என்க.

மாதிரி பிறந்த இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $= \mu$ என்க.

மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= S$ என்க

μ-ன் நம்பிக்கை இடைவெளி =

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} \times t_{0}, \alpha\right)\text{-லிருந்து}\left(\overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n-1}} \times t_{0}, \alpha\right)\text{வரை.}$$

இதில் $t_0 \alpha$ என்பது $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளையுடைய (α% சிறப்பு வரம்பில்) ஸ்டூடன்ட்- t பட்டியலின் மதிப்பு.

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{0}, 5\%, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{0}, 5\%\right)\text{என்பது}$$

μ-ன் 95% நம்பிக்கை வரம்புகளாகும்.

5. 'F'—பரவல்

திட்ட விலக்கம் சமமாகவுள்ள இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து ராண்டம் முறையில் இரு தனி மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

முதல் மாதிரியின் உருவ அளவு $= n_1$ என்க

இரண்டாவது ,, ,, ,, $= n_2$ என்க.

முதல் மாதிரியிலிருந்து S_1^2ஐயும்,

இங்கு $S_1^2 = \underline{\sum (X_1 - \overline{X}_1)^2}$

இரண்டாவது மாதிரியிலிருந்து S_2^2ஐயும்

$$\text{இங்கு} \quad S_2^2 = \frac{\sum (X_2 - \overline{X_2})^2}{n_2 - 1}$$

கணக்கிட்டு, S_1^2, S_2^2 ஆகியவை பயன்படுத்தி,

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

மேற் கூறியவாறு அடுத்தடுத்து பல மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு தடவையும் (இரு மாதிரிகளிலிருந்து) Fஐக் கணக்கிட வேண்டும். இப்போது, பல F மதிப்புகள் கிடைக்கும். F மதிப்புகளின் அலைவுப் பரவலை F–ன் மாதிரிப் பரவல் என்கிறோம். S_1^2, S_2^2 ஆகிய இரண்டில் எது பெரியதோ அதை F–ன் தொகுதியில் எழுத வேண்டும். எனவே $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ என எழுதும் போது S_1^2 பெரியது எனக் கொள்ளுகிறோம். S_1^2, S_2^2 என்பவை முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்களின் திருத்தமான மதிப்பீடுகளாகும். இம் மதிப்பீடுகளின் வரையற்ற பாகைகள் முறையே $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ ஆகும். சிறப்புக் காண் சோதனைகளில் கண்டறிந்த F–ன் மதிப்பு, கொடுக்கப்பட்ட வரையற்ற பாகைகளையுடைய எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட சிறப்பு வரம்பில் F பட்டியலின் மதிப்பைவிடப் பெரியதாக இருந்தால், சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம்.

F பரவலை நடைமுறையில் பயன்படுத்த ஏற்கெனவே தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியல்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பிற்சேர்க்கைப் பட்டியல்களில், F பட்டியல் என்ற தலைப்புகளில் (.05 சிறப்பு வரம்பிலும் இரு பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. F பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் போது S_1^2, S_2^2 ஆகிய இரண்டில் பெரியதற்கான வரையற்ற பாகைகள் ($n_1 - 1$) எனவும், சிறியதற்கான வரையற்ற பாகைகள் ($= n_2 - 1$) எனவும் கொள்ள வேண்டும்.

6. இரு சிறிய மாதிரிகளின் திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாட்டின் சிறப்பைக் காணுதல்

முதலில், $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

இங்கு,

$$S_1^2 = \frac{\Sigma X_1 - \overline{X}_1)^2}{n_1 - 1}$$

$$S_2^2 = \frac{\Sigma X_2 - \overline{X}_2)^2}{n_2 - 1}$$

(கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கண்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை $(n_1 - 1)$ஆல் வகுக்க வேண்டும் என்பதைக் கவனிக்க.)

இந்த F-ன் மதிப்பு, $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ வரையற்ற பாகைகளையுடை (5% வரம்பில் அல்லது 1% வரம்பில்) F பட்டியலின் மதிப்பைவிடப் பெரியதாக இருந்தால் சூனிய எடுகோளைத் (முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்களில் வேறுபாடு இல்லை என்ற எடுகோளை) தள்ளுபடி செய்ய வேண்டும்.

F சோதனை பரவற்படி ஆய்வில் அல்லது மாறுபாட்டின் ஆய்வில் (Analysis of variance) பயனுள்ளதாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஓர் உளவியல் சோதனை 31 மாணவர்களுக்கும் 26 மாணவிகளுக்கும் கொடுக்கப்படுகிறது. மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்புகளிலிருந்து $(\Sigma X_1 - \overline{X_1})^2 = 1926$-ம், மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்புகளிலிருந்து $\Sigma (X_2 - \overline{X}_2)^2 = 2875$-ம் கணக்கிடப்பட்டன. சோதனையில் அவர்களின் செயலின் மாறுபாட்டில், மாணவர்கள், மாணவிகளிடமிருந்து பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வேறுபடுகின்றனரா எனக் காண்க.

$$\Sigma (X_1 - \overline{X})^2 = 1926$$

$$n_1 = 31$$

$$S_1^2 - \frac{\sum X_1 - \overline{X})^2}{n_1 - 1}$$

$$= \frac{1926}{31-1} = \frac{1926}{30}$$

$$= 64.20$$

$\Sigma (X_2 - \overline{X})^2 = 2875$

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = $n_2 = 26$

$$S_2^2 = \frac{\sum (X_2 - \overline{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{2875}{26 - 1}$$

$$= \frac{2875}{25}$$

$$= 115.00$$

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

($\because$ $S_2^2 > S_1^2$ ஆக இருப்பதால், S_2^2ஐத் தொகுதியில் எழுத வேண்டும்.)

$$= \frac{115.00}{64.20}$$

$$= 1.79.$$

வரையற்ற பாகைகள் = $n_1 - 1,\ n_2 - 1$

$= 31 - 1,\ 26 - 1$

$= 30,\ 25$

F பட்டியலில், F-ன் தொகுதிக்கான வரையற்ற பாகை n_1 ஆதலால், 115-க்கான வரையற்ற பாகை = 25ஐயும் 64.20-க்கான வரையற்ற பாகை = 30ஐயும் கொள்ள வேண்டும். F பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் போது, முதல் வரிசையில் கண்ட (1, 2, 3 ... போன்ற) மதிப்பை, அதாவது n_1ஐத் தொகுதிக்கான வரையற்ற பாகையாகவும், முதல் பத்தியில் (1, 2, 3 ... போன்ற) கண்ட மதிப்பை, அதாவது n_2ஐப் பொதுப் பகுவெண் (denominator)ணுக்கான வரையற்ற பாகையாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எனவே, F பட்டியலிலிருந்து 25 (= V_1), 30 (=$_2$) வரையற்ற பாகைகளுக்கு 5% வரம்பில் 1·88 என்ற மதிப்பைஎடுத்துக் கொள்கிறோம்.

கண்டறிந்த F-ன் மதிப்பு $(= 1.79)$ F பட்டியலின் மதிப்பினும் சிறியதாக இருப்பதால், சூனிய எடுகோளை (மாணவர்களுக்கும், மாணவிகளுக்கான மாறுபாட்டுகளிடையே வேறுபாடு இல்லை என்ற எடுகோளை) ஏற்றுக் கொள்கின்றோம். எனவே, மாறுபாடுகளின் வேறுபாடு 5% வரம்பில் சிறப்புடையதன்று.

பயிற்சி 11.

(1) 10 மாணவர்கள் பெற்ற நுண்ணறிவு ஈவுகள் வருமாறு 70, 110, 120, 101, 89, 93, 98, 107, 100, 95.

முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 105 என்ற கொள்கை பொருத்தமுடையதுதானா எனக் காண்க.

(2) 8, 7, அளவுகள் கொண்ட இரு மாதிரிகளின் மதிப்புகள் வருமாறு :

மாதிரி I	15	9	10	13	11	11	8	8
மாதிரி II	12	8	12	10	11	10	7	

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்திற்குரிய மதிப்பீடுகளின் வேறுபாடு சிறப்புடையதா?

(3) 10 ஜோடி மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0·41 எனில், 1% இந்தக் கெழு முக்கியமானதா எனக் காண்க.

(4) 15 உருவ அளவுள்ள ஒரு மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் 7·3 எனில், 95% வரம்பில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்க நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

(5) இரண்டு வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில் கண்டறிந்த சோடி மதிப்புகள் வருமாறு :

சூழ்நிலை A :	8	17	12	19	5	6	20	3
சூழ்நிலை B :	12	31	17	17	8	14	25	4

கூட்டுச் சராசரிகளது வேறுபாட்டின் சிறப்பினையும் திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாட்டின் சிறப்பினையும் காண்க.

(6) ஒரு பட்டணத்தில் ஒரு பகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 16 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 107; திட்ட விலக்கம் 10. மற்றொரு பகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 14 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 112; திட்ட விலக்கம் 8. நுண்ணறிவில் இவ்விரு குழுக்களிடையே வேறுபாடு இருக்கிறதா என ஆய்க.

12. கை-வர்க்க அல்லது χ^2 பரவல்

(Chi-Square or χ^2 distribution)

முந்தைய பக்கங்களில், ஈருறுப்புப் பரவல், பாய்ஸான் பரவல், இயல்நிலைப் பரவல், 't' பரவல், F பரவல் முதலியுன வற்றைப் பற்றியும், அவற்றின் பயன்களையும் கண்டோம். இப்போது, நடைமுறையில் மிகவும் பயனுள்ளதாக அமைகின்ற மற்றொரு மாதிரிப் பரவலான கை-வர்க்க அல்லது χ^2 பரவல் பற்றியும் அதன் பயன்களையும் காண்போம். χ^2 சோதனை பல வகைப்பட்ட பிரச்சினைகளுக்குப் பயன்படும். கண்டறிந்த அலைவெண்களும் (Observed frequencies ஊக கோட்பாடுடைய அல்லது எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களுடன் (Theoretical or Expected frequencies) ஒப்பிட்டுப் பார்த்து எடுகோள்களைப் பற்றி சோதனை செய்ய இது உதவுகிறது. கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களுக்குமுள்ள வித்தியாசத்தைக் கணக்கிட்டு, குறித்த சிறப்பு வரம்பில் கருதப்பட்ட எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டியதா அல்லது தள்ளிவிட வேண்டியதா என்பதற்கு முடிவு காண இது உதவுகிறது. அதாவது, கண்டறிந்த விவரங்களுக்கும் எதிர்பார்க்கும் விவரங்களுக்கும் உள்ள வித்தியாசம் வாய்ப்பு விதிகளால் (மாதிரி முறையினால்) மட்டுமே நிகழக்கூடியதைவிடப் பெரியதா, அல்லவா என்பதை அறிய இது உதவுகிறது. கண்டறிந்த தகவல்களிலிருந்து χ^2 கணக்கிடப்படுவதால், முழுமைத் தொகுதியின் தன்மைகளைப்பற்றி ஒருவித கருத்துகளும் நாம் மேற்கொள்வதில்லை என்பது χ^2 சோதனையின் ஒரு தனிச் சிறப்பாகும்.

தன் ஆறு பக்கங்களில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களைக் கொண்ட ஒரு கட்டையை (பகடை—die) வீசி எறிவதாக

வைத்துக்கொள்வோம். அந்தப் பகடை ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற (Unbiased) பகடை எனப் புனைந்துக் கொள்வோம். ஒரு தடவை பகடையை வீசி எறிந்தால் ஓர் எண்ணைப் பெறுவதற்கான ஊக அளவை $\frac{1}{6}$ ஆகும். 300 தடவைகள் அந்தப் பகடையை வீசி எறிந்தால், 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எண்களை முறையே 50, 50, 50, 50, 50, 50 தடவைகளில் பெற எதிர்பார்க்கிறோம். அதாவது, எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட பகடை திருத்தமான அதாவது பிறழ்ச்சியற்ற பகடையாக இருந்தால், 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எண்களில் ஒவ்வோர் எண்ணையும் 50 தடவைகள் பெறலாம் என எதிர்பார்க்கிறோம். ஆகவே, 50, 50, 50, 50, 50, 50 ஆகியவற்றை எதிர்பார்க்கும் அல்லது ஊக கோட்பாடுடைய அலைவெண்கள் என்கிறோம். இப்போது அந்தப் பகடையை வீசிஎறிந்து பரிசோதித்துப்பார்த்தால் (300 தடவைகளில்), 1 என்ற எண் 43 தடவைகளும் 2 என்ற எண் 55 தடவைகளும், 3 என்ற எண் 39 தடவைகளும், 4 என்ற எண் 56 தடவைகளும் 5 என்ற ஏண் 63 தடவைகளும், 6 என்ற எண் 44 தடவைகளும் விழுகின்றன (பெறுகிறோம்) எனக் கொள்வோம். எனவே, பரிசோதனையின் பலனாகக் கண்ட 43, 55, 39, 55, 63, 44 ஆகியவற்றைக் கண்டறிந்த அலைவெண்கள் என்கிறோம். ஆகவே, கண்டறிந்த அலைவெண்களை எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து, எடுகோளைப் (கொடுக்கப்பட்ட பகடை பிறழ்ச்சியற்ற பகடை என்ற எடுகோளைப்)பற்றி சோதனை செய்ய χ^2 உதவுகிறது.

$O_1, O_2, O_3, \ldots\ldots O_n$ என்பன 'n' கண்டறிந்த அலைவெண்கள் என்க; அவற்றின் முறையே எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_n$ என்க. எனில்

$$\chi^2 = \frac{(O_1-E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2-E_2)^2}{E_2} + \ldots\ldots + \frac{(O_n-E_n)^2}{E_n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(O_j-E_j)^2}{E_j}$$

மொத்த அலைவெண்கள் N எனில்,

மொத்த கண்டறிந்த அலைவெண்கள் = மொத்த எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் = N

அதாவது

$$\sum_{j=1}^{n} O_j = \sum_{j=1}^{n} E_j = N.$$

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை 300 தடவைகள் வீசி எறியும் பரிசோதனையில், கண்டறிந்த அலைவெண்களை எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்களுடன் ஒப்பிட χ^2ஐக் கணக்கிடுவோம்.

பகடை எண்	கண்டறிந்த அலைவெண் கள் O_j	எதிர் பார்க்கும் அலைவெண் கள் E_j	O_j-E_j	$(O_j-E_j)^2$	$\frac{(O_j-E_j)^2}{E_j}$
1	43	50	—7	49	0·98 $(=\frac{49}{50})$
2	55	50	5	25	·050
3	39	50	—11	121	2·42
4	56	50	6	36	0·72
5	63	50	13	169	3·38
6	44	50	—6	36	0·72
மொத்தம்	$(N) = 300$	$N = 300$	...	...	$\chi^2 = 8\ 72$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து,

$\sum O_j = 300 = \Sigma E_j$,

$n = 6$,

$\chi^2 = 8.72$, எனக் காண்கிறோம்.

கண்டறிந்த அலைவெண்களும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் களும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் சமமாக இருந்தால், χ^2-ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்; அவற்றின் வித்தியாசம் அதிகமாக, அதிகமாக χ^2-ன் மதிப்பும் அதிகமாகும். இவ்வாறு கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பை, χ^2 பட்டியலின் (ஏற்கனவே தயாரிக்கப்பட்ட) மதிப் புடன் ஒப்பிட்டு எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்வதோ அல்லது தள்ளுபடி செய்வதோ செய்கிறோம். எப்பொழுதும் χ^2 நேரெண்ணாகவே (Positive) இருக்கும்.

1. χ^2-ன் மாதிரிப் பரவல்

பிறழ்ச்சியற்ற 100 நாணயங்களை எறியும் போது (சுண்டும் போது), 46 தலைகளும் 54 பூக்களும் கிடைப்பதாக வைத்துக்

கொள்வோம். ஆனால் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட நாணயங்கள் பிறழ்ச்சியற்றவைகளாக இருப்பதால் (சம வாய்ப்பினையுடைய தாகக் கருதுவதால்) 50 தலைகளும், 50 பூக்களும் எதிர்பார்க்கிறோம். அடியிற் கண்டவாறு χ^2-யைக் கணக்கிடுவோம்.

	O_j	E_j	(O_j-E_j)	$(O_j-E_j)^2$	$\frac{(O_j-E_j)^2}{E_j}$
தலை	46	50	—4	16	.32
பூ	54	50	+4	16	.32
	100	100			$\chi^2 = .64$

100 நாணயங்களைச் சுண்டுகின்ற பொழுதில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கான அலைவெண்களைக் காண்கிறோம். (1) தலைகளுக்கான அலைவெண்கள் (2) பூக்களுக்கான அலைவெண்கள். எனவே, பூக்களுக்கான அலைவெண்கள் தெரிந்தால் தலைகளுக்கான அலைவெண்களைத் தீர்மானித்து விடலாம். அதாவது 100 — 54 = 46 அல்லது தலைகளுக்கான அலைவெண்கள் தெரிந்தால் பூக்களுக்கான அலைவெண்களைத் தீர்மானிக்கலாம். அதாவது 100 — 46 = 54. ஆகவே இவையிரண்டில் ஏதாவது ஒன்று தெரிந்தால் மற்றொன்றைத் தீர்மானித்து விடலாம் எனவே, இவையிரண்டில் ஒன்றுதான் சுயேச்சையானதாக இருக்கும். அதாவது, ஒன்று மட்டும்தான் சுயேச்சையாக மாறலாம். ஆகவே இதில் வரையற்ற பாகை 2 — 1 = 1 ஆகும். இத்தகைய நிலையில் χ^2 ஒரு வரையற்ற பாகையையுடையதாகக் கூறுகிறோம்.

இப்போது அந்த 100 நாணயங்களை இரண்டாவது முறை சுண்டி, மேற் கூறிய முறையில் χ^2ஐக் கணக்கிடுவோம். அதே போல் அந்த 100 நாணயங்களைப் பலமுறை சுண்டினால் பல χ^2-களைக் கணக்கிடலாம். அவ்வாறு கணக்கிடப் பட்ட χ^2 மதிப்புகளை ஓர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துக் காட்டலாம். அத்தகைய அலைவுப் பரவலை, 1 வரையற்ற பாகையுடைய χ^2-ன் செய்முறை மாதிரிப் பரவல் (Experimental sampling distribution of χ^2) என்கிறோம்.

100 பகடைகளைப் பல முறை வீசி எறிந்தால் மேற்கூறிய முறையில் 6 எண்களுக்கான கண்டறிந்த அலைவெண்களையும், எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களையும் கணக்கிட்டு, χ^2 மதிப்புகளைக் கணித்து, χ^2-ன் மாதிரிப் பரவலை அமைக்கலாம். இதில் வரையற்ற பாகைகளின் மதிப்பை யொட்டியே χ^2-ன் பரவல் அமையும்.

χ^2 பரவலை நடைமுறையில் பயன்படுத்தும் போது ஏற்கெனவே தயாரித்த பட்டியல் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது. அத்தகைய பட்டியல், χ^2 பட்டியல் என்ற தலைப்புடன் பிற் சேர்க்கையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அந்தப் பட்டியலின் பத்தி களில் ·01, .05, ... என்ற தலைப்பிட்டவைகள் ஊக அளவை களைக் (சிறப்பு வரம்புகளைக்) குறிக்கின்றன. சாதாரணமாக பயன்படுத்தப்படும் .01, .05 சிறப்பு வரம்புகளையே χ^2 சோதனை களில் பயன்படுத்துகிறோம். 5 வரையற்ற பாகைகளையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு .05 சிறப்பு வரம்பில் தேவைப்பட்டால், .05 என்ற பத்தியில் $n = 5$ என்ற வரிசையில் காணும் மதிப்பை (11.07ஐ) எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

2. பொருந்தச் சோதனை (Goodness of fit)

இயல்நிலைப் பரவலையோ அல்லது மற்ற ஏதேனும் பரவலையோ குறித்து ஓர் அலைவுப் பரவலுக்குப் பொருத்திப் பார்க்குங் கால் நாம் கண்டறிந்ததை (அலைவுப் பரவலை) எதிர்பார்ப்பதுடன் (இயல்நிலைப் பரவலோ அல்லது மற்ற ஏதேனும் பரவலுடன்) இணைத்துப் பார்த்து, அவ்விரண்டு பரவல்களுக்குள்ள இசைவை χ^2ஐப் பயன்படுத்திச் சோதிக்கலாம். அத்தகைய சோதனைக்கு $\chi^2 = \sum \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தி χ^2-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

'மாணவர்கள் அரசியலில் பங்கு கொள்ளலாமா' என்பதைப்பற்றி கருத்து தெரிவிக்கும்படி 48 கல்வியாளர்கள் கேட்டுக் கொள்ளப்பட்டனர். பதில்களை மூன்று வகைகளாகப் பிரித்து, அவர்களின் கருத்து பெறப்பட்டன. விவரங்கள் வருமாறு :

	பதில்கள்		
	பங்கு கொள்ளலாம்	பங்கெடுக்கக் கூடாது	சிரத்தையற்ற
கல்வியாளர்கள்	12	24	12

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஒரு குறித்த கருத்துப் போக்கினைத் தெரிவிக்கின்றனவா என ஆய்க.

கண்டறிந்த (பதில்கள் ஒவ்வொரு வகைக்கும்) அலைவெண்கள் = 12, 24, 12.

மூன்றும் சம வாய்ப்பினையுடையதாகையால் ஒருவகைப் பதில் பெறுவதற்கான ஊக அளவை = $\frac{1}{3}$.

எனவே, ஒவ்வொரு வகையிலும் எதிர்பார்க்கும் பதில்கள் $= \frac{48}{3}, \frac{48}{3}, \frac{48}{3}$

$= 16, 16\ 16.$

பதில்கள்	O_j	E_j	$(O_j - E_j)$	$(O_j - E_j)^2$	$\frac{(O_j-E_j)^2}{E_j}$
முதல் வகைக்கு	12	16	−4	16	1
2ஆவது வகைக்கு	24	16	8	64	4
3ஆவது வகைக்கு	12	16	−4	16	1
					$\chi^2 = 6$

$\chi^2 = 6$

வரையற்ற பாகைகள் = 3 − 1 = 2

5% சிறப்பு வரம்பில் 2 வரையற்ற பாகைகளையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு = 5.99.

எனவே கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு (6), 2 வரையற்ற பாகைகளையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பை (5.99) விடப் பெரியதாகையால் 5% வரம்பில் சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, மாணவர்கள் அரசியலில் பங்குக் கொள்ளக் கூடாது என்ற கருத்துப் போக்கினை விவரங்கள் தெரிவிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

விற்பனை நிர்வாகிகளின் கருத்தின்படி 84 விற்பனையாளர்கள் மூன்று குழுக்களாக பிரிக்கப்பட்டனர். விவரங்கள் வருமாறு :

திறமை வாய்ந்த விற்பனையாளர்கள்	சாதாரணமான விற்பனையாளர்கள்	திறமையற்ற விற்பனையாளர்கள்
30	40	12

விற்பனையாளர்களைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியில் விற்பனைத் தொகுதியில் விற்பனைத் திறமை இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்தால் எதிர்பார்க்கும் விவரங்களும், கண்டறிந்த விவரங்களுக்கும் உள்ள வேறுபாடு சிறப்புடையதா என ஆய்க.

விற்பனைத் திறமை இயல்நிலைப் பரவலில் அமையும் என்ற எடுகோளின்படி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காண்போம்.

மொத்த அலைவெண்களை 1–க்குச் சமமாக்கி வளைகோட்டுப் பரப்பு 1 என நாம் கூறுகிறோம். இயல்நிலை வளைகோட்டில், $x = -3\sigma$, $x = +3\sigma$ ஆகியவற்றிலுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே வளைக்கோட்டுக்குள் அடங்கும் பரப்பு 0.997 ஆகும் என நமக்கு தெரியும். அதாவது இயல்நிலைப் பரவலில் -3σ, $+3\sigma$ ஆகியவற்றிலுள்ள குத்தாயங்களுக்கிடையே எல்லா விவரங்களும் அடங்கிவிடும் என்பதாகும். இப்போது இதனை மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிப்போம்.

-3σ-லிருந்து -1σ வரை

-1σ ,, $+1\sigma$,,

$+1\sigma$,, $+3\sigma$,,

இப்போது -3σவிலும் -1σவிலும் நிறுத்தப்பட்ட குத்தாயங்களுக்கிடையே விழும் குறிப்புகளின் வீதத்தைக் காண்போம். இயல்நிலைப் பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து, பரப்பு ·16 எனக் கொள்கிறோம். அதாவது, இயல்நிலைப் பரப்புப் பட்டியலில் $\frac{x}{\sigma}$ பத்தியில் 1·0 என்பதற்கு நேராக ·00 என்ற தலைப்பிட்ட பத்தியில் ·34 என்ற மதிப்பையும், 3 என்பதற்கு நேராக ·50 என்ற

மதிப்பையும் (சராசரிக்கும் கீழ் எல்லைக்குமிடையே உள்ள பரப்பு 0·50 ஆகும்) பார்க்கிறோம். ஆகவே,

$-\sigma 3$-க்கும் 1σ-க்கும் இடையேயுள்ள பரப்பு $= 50 - \cdot 34 = \cdot 16$

அதேபோல்,

-1σ-க்கும் $+1\sigma$-க்கும் இடையே உள்ள பரப்பையும் இயல் நிலைப் பரப்புப் பட்டியலைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

-1σ-க்கும் $+1\sigma$-க்கும் இடையேயுள்ள பரப்பு $= \cdot 68$

$+1\sigma$-க்கும் $+3\sigma$-க்கும் இடையேயுள்ள பரப்பு $= 16.$

விற்பனைத் திறமை இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்தால் திறமையுள்ள விற்பனையாளர்கள் $= \cdot 16 \times 84$

$= 13 \cdot 44$ என எதிர்பார்க்கிறோம்.

அதேபோல் மற்ற சாதாரண குழுவில் $\cdot 68 \times 84 = 57 \cdot 12$ பேர்களை எதிர்பார்க்கிறோம்.

திறமையற்ற குழுவில் 13·44 பேர்களை எதிர்பார்க்கிறோம். இப்போது மேலே கண்ட விவரங்களைக் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் அமைப்போம்.

விற்பனையாளர்கள்	O_j	E_j	$(O_j - E_j)$	$(O_j - E_j)^2$	$\frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$
திறமை வாய்ந்த	32	13·44	18 6	345·96	25·7
சாதாரணமான	40	57·12	17·12	293·09	5·1
திறமையற்ற	12	13·44	1·44	2·07	0·2
					$\chi^2 = 31 \cdot 0$

கண்டறிந்த $\chi^2 = 31 \cdot 00$

வரையற்ற பாகைகள் $= 3 - 1 = 2.$

2 வரையற்ற பாகைகளுக்கு 5% வரம்பில் χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு $= 5 \cdot 99$

கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு, χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிட மிகப் பெரியதாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளை 5% வரம்பில தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, விற்பனைத் திறமை இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகிறது என்பதைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். நிர்வாகிகள் விற்பனையாளர்களின் திறமையை மதிப்பிடும்போது அதிகமான பேர்களைத் திறமை வாய்ந்தவர் எனவும், குறைந்த

பேர்களைச் சாதாரணமானவர் எனவும், (சரியான முறையில் மதிப்பிட்டிருக்கிறார்கள் என்று கூறமுடியாத வகையில்) மதிப்பிட்டிருக்கிறார்கள்.

3. இணை பட்டியலில் பண்புகளின் தொடர்பற்ற நிலைச் சோதனை (Test of independence in contingency table)

பண்புகளின் தனித் தன்மையை சோதனை செய்யும் போது, அப் பண்புகள் தொடர்பற்றவையா இல்லையா என்பதனை மட்டும்தான் கூற முடியும். அப் பண்புகளிடையே இருக்கக் கூடிய தன்மையையோ, அளவையோ χ^2 மதிப்பிடாது. பண்புகள் தொடர்புள்ளவைகளாக இருப்பின் அத் தொடர்பின் வகை எவ்வாறு என்பதனை χ^2–னின்று தெரிந்துகொள்ளமுடியாது.

ஓர் இணை பட்டியலில் 'r' வரிசைகளும் 'c' பத்திகளும் அமைவதாகக் கொள்வோம். இந்த இணை பட்டியலைக் கருதுங்கால் அதில் $r \times c$ அறைகள் அல்லது கட்டங்கள் (cells) இருக்கும். பண்புகள் தொடர்பற்றவை என்பதே நமது எடுகோள் ஆகும். ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் இருக்கின்ற O_j என்ற கொடுக்கப்பட்ட அல்லது கண்டறிந்த அலைவெண்ணிற்கு இணையான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்ணைக் E_jஐக்) காணவேண்டும். எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடும்போது பண்புகளிடையே தொடர்பில்லை என்ற விதிக்கேற்பக் (எடுகோளுக்கேற்ப) கணக்கிட வேண்டும்.

இப்போது $\chi^2 = \sum \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$ என்பது கை-வர்க்கப் பரவலில் அமைகிறது. அதன் வரையற்ற பாகைகள் $(r-1)(c-1)$ ஆகும். பொதுவாக, r வரிசைகளும் c பத்திகளும் உள்ள ஓர் இணை பட்டியலுக்கு χ^2 சோதனையைப் பயன்படுத்துங்கால், வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $(r-1) \times (c-1)$ ஆகும். χ பட்டியலில் $(r-1)(c-1)$ வரையற்ற பாகைகளில் குறித்த சிறப்பு வரம்பில் χ^2–க்கான மதிப்பைக் காண வேண்டும். இப்போது கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிடப் பெரியதானல், பண்புகள் தொடர்பற்றவை என்ற நமது எடுகோள் தள்ளுபடி ஆகிறது. ஆகவே, பண்புகளுக்கிடையே தொடர்பிருப்பதனை விவரங்கள் சுட்டிக் காட்டுகின்றன என முடிவு கூறலாம்.

2×2 இணை பட்டியலில் χ^2

கொடுக்கப்பட்ட இரு பண்புகளிலும் இரு பிரிவுகளே உள்ள நிலையில் 2 வரிசைகளும் 2 பத்திகளும் உள்ள ஓர் இணை பட்டி

யலை 2×2 இணை பட்டியல் என்கிறோம். இத்தகைய பட்டியலில் நான்கு அறைகள் மட்டுமே இருக்கும். இத்தகைய பட்டியல்களின் தனி அறைகளில் உள்ள அலைவெண்கள் சிறியனவாக இருக்கலாகாது; சாதாரணமாக 10ஐ விடப் பெரிதாக இருத்தல் நலம். சிறிய அலைவெண்களைக் கொண்டு கணக்கிடுவதினால் ஏற்படக்கூடிய ஒருவகைச் சார்பை (bias), யேட்ஸ் திருத்தத்தை (Yates' correction) அமைப்பதால் குறைக்கலாம். மாதிரியின் உருவ அளவு பெரிதாக (பொதுவாக 50–க்கு மேல்) இருந்தால் இத் திருத்தத்தைச் செய்ய வேண்டியதில்லை. ஆனால், சிறிய மாதிரியில் எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்கள் ஒவ்வொன்றும் (ஒவ்வோர் அறையிலும்) 5-க்கும் 10-க்கும் இடையே இருப்பின் இத் திருத்தத்தை அமைத்தல் நலம். பொதுவாக, வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை 1 ஆக இருப்பின், இத் திருத்தம் செய்யப்படுகிறது. இத் திருத்தத்தை நடைமுறையில் கீழ்க் கண்டவாறு செய்யலாம். முதலில் எதிர்பார்க்கக் கூடிய அலைவெண்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். பிறகு கீழ்க்கண்டவாறு திருத்தமான χ^2ஐக் கணிக்கலாம்.

(திருத்தமான) χ^2

$$= \frac{(|O_1 - E_1| - .5)^2}{E_1} + \frac{(|O_2 - E_2| - .5)^2}{E_2} + \dots + \frac{(|O_n - E_n| - .5)^2}{E_n}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

ஒருவர் 10 நிகழ்ச்சிகளில் 7 நிகழ்ச்சிகளைச் சரியாகச் சொல்கிறார். ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியிலும் சரியான முடிவுக்கான (சொல்வதற்கான) ஊக அளவை $\frac{1}{2}$. திருத்தமான χ^2 ஐக் கணிக்கவும்.

முடிவு	O_j	E_j	$O_j - E_j$	$\lvert O_j - E_j \rvert$	$(\lvert O_j - E_j \rvert - .5)$	$(\lvert O_j - E_j \rvert - .5)^2$
சரியான	7	5	2	2	1.5	2.25
தவறான	3	5	−2	2	1.5	2.25

$$\chi^2 = \frac{(|O_1 - E_1| - .5)^2}{E_1} + \frac{(|O_2 - E_2| - .5)^2}{E_2}$$

$$= \frac{2.25}{5} + \frac{2.25}{5}$$

$$= \cdot 45 + \cdot 45$$

$$= \cdot 90$$

$\therefore$ (திருத்தமான) $\chi^2 = \cdot 90$.

இணைபட்டியலில் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடும் முறை

A என்ற பண்பு '*r*' பிரிவுகளையும், *B* என்ற பண்பு *C* பிரிவுகளையும் கொண்டுள்ள நிலையில் *r* வரிசைகளும் *C* பிரிவுகளும் உள்ள ஓர் இணைபட்டியலில் அடியிற்கண்ட அமைப்பில் இருக்கும்.

		பண்பு *A*							துணை மொத்தம்
		A_1	A_2	A_3...	...	...	...	... A_r	
	B_1	(A_1B_1)	$(A_2\ B_1)$	$(A_3\ B_1)$	·		...	$(A_r\ B_1)$	R_1
	B_2	(A_1B_2)	$(A_2\ B_2$	(A_3B_2)		...	...	$(A_r\ B_2)$	R_2
	B_3	$(A_1\ B_3)$	$(A_2\ B_3)$	$(A_3\ B_3)$	...	...	...	$(A_r\ B_3)$	R_3
பண்பு *B*.	⋮	...	...	...	...	...	..	...	...
	⋮	...	...	...	...	...	...	...	...
	⋮	...	...	...	..	...	...	...	...
	B_c	$(A_1\ B_c)$	$(A_2\ B_c)$	$A_3\ B_c$	...	...	..	$(A_r\ B_c)$	R_c
துணை மொத்தம்		S_1	S_2	S_3	...		...	S_r	மொத்தம் N

இந்த இணை பட்டியலில் மொத்தம் $r \times c$ அறைகள் இருக்கின்றன. A என்ற பண்பு $A_1, A_2, \ldots A_r$ என்ற பிரிவுகளையும் B என்ற பண்பு $B_1, B_2, \ldots B_c$ என்ற பிரிவுகளையும் கொண்டுள்ளன. வரிசையின் மொத்தங்கள் $R_1, R_2, \ldots R_c$ எனவும், பத்தியின் மொத்தங்கள் $S_1, S_2, \ldots S_r$ எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றைத் துணை மொத்தங்கள் என்க. துணை மொத்தங்களின் மொத்தத்தை N என்க. வரிசைகளின் துணை மொத்தங்களின் மொத்தமும், பத்திகளின் துணை மொத்தங்களின் மொத்தமும் சமமாகும். $(A_1 B_1)$, $(A_2 B_1)$, $(A_1 B_2)$......$(A_r B_c)$என்பன அறை கண்டறிந்த அலைவெண்கள்; அதாவது கொடுக்கப்பட்ட அறை அலைவெண்கள். இப்போது A என்ற பண்புக்கும் B என்ற பண்புக்கும் தொடர்பில்லை எனப் புனைந்து கொண்டு (எடுகோள்), எடுகோளின்படி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காண்போம். $(A_1 B_1)$ ஐக் கண்டறிந்த அலைவெண்ணைக் கொண்டுள்ள அறையின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= \dfrac{R_1 \times S_1}{N}$.

அதாவது, கண்டறிந்த அலைவெண், $(A_1 B_1)$ அடங்கியுள்ள அறையின், வரிசை துணை மொத்தத்தையும், பத்தி துணை மொத்தத்தையும் பெருக்கி, அதனை மொத்த அலைவெண்களால் வகுக்கவேண்டும்.

இதேபோல,

$(A_2 B_1)$ உள்ள அறையின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்

$$= \frac{R_1 \times S_2}{N} \text{ ஆகும்.}$$

$(A_1 B_2)$-க்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= \dfrac{R_2 \times S_1}{N}$

$(A_r B_c)$-க்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= \dfrac{R_c \times S_r}{N}$

இதுபோன்று மற்ற அறைகளுக்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

1000 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின், பொது அறிவுக்கும், சமூக நடத்தைக்குமான புள்ளி விவரங்கள்

அடியிற்கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொது அறிவுக்கும், சமூக நடத்தைக்குமுள்ள உறவினை ஆய்க.

		பொது அறிவு			
		நல்ல	சுமாரான	மட்டமான	மொத்தம்
சமூக நடத்தை	நல்ல	44	22	4	70
	சுமாரான	265	257	178	700
	கெட்ட	41	91	98	230
மொத்தம்		350	370	280	1000

சூனிய எடுகோள்: பொது அறிவுக்கும், சமூக நடத்தைக்கும் தொடர்பில்லை.

பண்பு A — பொது அறிவு

$N = 1000;$

பண்பு B — சமூக நடத்தை.

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்

(i) 44 (கண்டறிந்த அலைவெண்கள்) அடங்கியுள்ள அறையின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்

$$= \frac{70 \times 350}{1000} = 24.5$$

இதேபோல மற்ற அறை எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்:

(ii) $\frac{70 \times 370}{1000} = 25.9$

(iii) $\frac{70 \times 280}{1000} = 19.6$

(iv) $\frac{700 \times 350}{1000} = 245$

(v) $\frac{700 \times 370}{1000} = 259$

(vi) $\frac{700 \times 280}{1000} = 196$

(vii) $\frac{230 \times 350}{1000} = 80.5$

(viii) $\frac{230 \times 370}{1000} = 75.1$

(ix) $\frac{230 \times 280}{1000} = 64.4$

		பொது அறிவு			
		நல்ல	சுமாரான	மட்டமான	
சமூக நடத்தை	நல்ல	44 (24.5)	22 (25.9)	4 (19 6)	70
	சுமாரான	265 (245)	257 (259)	178 (196)	700
	கெட்ட	41 (80.5)	1 (75.1)	98 (64.4)	230
மொத்தம்		3.0	570	280	1000

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் அடைப்புகளில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

$$\chi^2 = \frac{(O_1-E_1)^2}{E_1}+\frac{(O_2-E_2)^2}{E_2}+\frac{(O_3-E_3)^2}{E_3}+\ldots\ldots+\frac{(O_9-E_9)^2}{E_9}$$

$$=\frac{(44-24.5)^2}{24.5}+\frac{(22-25.9)^2}{25.9}+\frac{(4-19.6)^2}{19.6}+\frac{(265-245)^2}{245}$$

$$+\frac{(257-259)^2}{259}+\frac{(178-196)^2}{196}+\frac{(41-80.5)^2}{80.5}$$

$$+\frac{(91-75.1)^2}{75.1}+\frac{(98-64.4)^2}{64.4}$$

$$= 15.52 + 0.59 + 12.42 + 1.63 + 0.02$$

$$+ 1.65 + 19.37 + 3.37 + 17.63$$

$$= 72.1.$$

இரு பண்புகளுக்கும் மூன்று பிரிவுகள் இருப்பதால் வரையற்ற பாகைகள்

$$= (3-1)\ (3-1) = 2 \times 2$$

$$= 4$$

∴ 4 வரையற்ற பாகைகளையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு, 5% சிறப்பு வரம்பில் = 9.49.

எனவே, கண்டறிந்த χ^2–ன் மதிப்பு (= 72.1), χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிட மிகப் பெரியதாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம் (5% வரம்பில்). ஆகவே, பொது அறிவுக்கும் சமூக நடத்தைக்கும் சிறப்பான தொடர்புண்டு என முடிவு கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

உந்து வண்டியினை ஓட்டுபவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க மேற்கொண்ட முதல், இறுதிச் சோதனைகளின் முடிவுகள் பின் வருமாறு :

		முதல் சோதனை		மொத்தம்
		தேறியவர்	தேறாதவர்	
இறுதிச் சோதனை	தேறியவர்	56	31	87
	தேறாதவர்	18	6	24
மொத்தம்		74	37	111

இரு சோதனைகளின் உறவினை ஆய்க.

சூனிய எடுகோள் : இரு சோதனைகளுக்கும் தொடர்பில்லை.

இது ஓர் 2 × 2 இணைப் பட்டியலாகும்.

சூனிய எடுகோளின்படி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் :

(i) கண்டறிந்த அலைவெண் 56-க்குரிய எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= \frac{87 \times 74}{111} = 58$

(ii) $\frac{87 \times 37}{111} = 29$

(iii) $\frac{24 \times 74}{111} = 16$

(iv) $\frac{24 \times 37}{111} = 8$

		முதல் சோதனை		மொத்தம்
		தேறியவர்	தேறாதவர்	
இறுதிச் சோதனை	தேறியவர்	56 (58)	31 (29)	87
	தேறாதவர்	18 (16)	6 (8)	24
மொத்தம்		74	37	111

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் அடைப்புகளில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

$$= \frac{(56-58)^2}{58} + \frac{(31-29)^2}{29} + \frac{(18-16)^2}{16} + \frac{(6-8)^2}{8}$$

$$= \frac{4}{58} + \frac{4}{29} + \frac{4}{16} + \frac{4}{8}$$

$$= .069 + .138 + .25 + .5$$

$$= .957$$

$$\chi^2 = .957$$

வரையற்ற பாகைகள் = (2 — 1) (2 – 1) = 1 × 1 = 1

1 வரையற்ற பாகையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு 5% சிறப்பு வரம்பில் = 3.84.

எனவே, கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு (=.957)

χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிடச் சிறியதாக இருப்பதால், சூனிய எடுகோளை 5% சிறப்பு வரம்பில் ஏற்றுக் கொள்கிறோம். எனவே, முதல் சோதனைக்கும் இறுதிச் சோதனைக்கும் தொடர்பில்லை (5% சிறப்பு வரம்பில்).

4. இணைப் பட்டியலில் χ^2ஐக் கணக்கிட எளிய சூத்திரங்கள்

2×2 இணை பட்டியலில் χ^2ஐக் கணக்கிட எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட வேண்டுமென்பதைக் கண்டோம். ஆனால், 2×2, 2×3, 2×4, ... 2×K போன்ற இணைப் பட்டியலில் χ^2ஐக் கணக்கிட எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடாமல் χ^2ஐக் கணிக்கலாம்.

2×2 இணைப் பட்டியலுக்கு χ^2 ஐக் கணிக்கக் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம். இணைப் பட்டியலை அடியிற் கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

	I	II	மொத்தம்
a	A	B	A+B
b	C	D	C+D
மொத்தம்	A+C	B+D	A+B+C+D=N

$$\chi^2 = \frac{N\,(AD - BC)^2}{(A+B)\,(C+D)\,(A+C)\,(B+D)}$$

A, B, C, D என்பவை கொடுக்கப்பட்ட அறை அலைவெண்களாகும்.

2×2 இணைப் பட்டியலில் அறை அலைவெண்கள் (அதாவது *A,B,C,D* ஆகியவை) மிகச் சிறிதாக (5 அல்லது அதற்குக் கீழ்) இருந்தால் யேட்ஸ் திருத்தத்தைச் செய்ய வேண்டியது அவசியம்.

எனவே,

$$\text{திருத்தமான } \chi^2 = \frac{N\left(|AD - BC| - \frac{N}{2}\right)^2}{(A+B)\quad(C+D)\quad(A+C)\quad(B+D)}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஒரு ரண சிகிச்சையானது குறிப்பிட்ட இடத்தில் மயக்க மருந்து அல்லது உடல் முழுவதுமான மயக்க மருந்து கொண்டு மேற் கொள்ளப்படுகிறது. மேற் கொள்ளபபட்ட அவ்வித பல சிகிச்சைகளின் முடிவுகள் வருமாறு :

	வெற்றி	தோல்வி	மொத்தம்
குறிப்பிட்ட இடத்தில் மயக்க மருந்து	75	25	100
உடல் முழுமைக்கும் மயக்க மருந்து	65	36	100
மொத்தம்	140	60	200

வெவ்வேறு வகையில் கொண்ட மயக்க மருந்துகளால் வெற்றி விகிதங்கள் வேறுபடுகின்றதா எனக் காண்க.

$$A = 75$$

$$B = 25$$

$$C = 65$$

$$D = 35$$

$$N = 200$$

$$\chi^2 = \frac{N(AD - BC)^2}{(A+B) \times (C+D) \times (A+C) \times (B+D)}$$

$$= \frac{200\,[(75 \times 35) - (25 \times 65)]}{140 \times 60 \times 100 \times 100}$$

$$= 2.38$$

$$\chi^2 = 2.38$$

வரையற்ற பாகைகள் $= (2-1)\ (2-1) = 1 \times 1 = 1$

∴ 1 வரையற்ற பாகைக்கு 5% சிறப்பு வரம்பில் χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு $= 3.84$.

எனவே, கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு $(= 2.38)$, χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிடச் சிறிதாக இருப்பதால் எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். எனவே, வெவ்வேறு வகையில் மேற்கொண்ட

தற்கும் வெற்றி, தோல்விக்கும் தொடர்பில்லை. ஆகவே, வெவ் வேறு வகையில் கொண்ட மயக்க மருந்துகளால் வெற்றி விகி தங்கள் வேறுபடுவதில்லை என்பதே நமது முடிவாகும்.

5. ஒரு படித்தான நிலைச் சோதனைகள் (Tests of homogeneity)

இரண்டு மாதிரிகளை ஒப்பிட்டு அம்மாதிரிகள் ஒரே முழு மைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டனவா என்ற எடுகோளைச் சோதனைச் செய்ய χ^2ஐப் பயன் படுத்தலாம். இதனை ஒரு படித்தான நிலைச் சோதனை எனக் கூறுவர். இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலி ருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவை என்ற சூரிய எடுகோளின்படி ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எதிர்பார்க்கக்கூடிய அலைவெண்களைக் கணக்கிட்டு, கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தின்படி χ^2ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

ஒரு சோதனை, இரு வேறுபட்ட உயர்நிலைப்பள்ளி மாண வர்களுக்கு (இரு மாதிரிகள்) கொடுக்கப்பட்டதில், அம் மாண வர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே பட்டியலில் கொடுக்கப்பட் டுள்ளன. இவ்விரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலி ருந்து எடுக்கப்பட்டனவா?

மதிப்பெண்கள்	மாதிரி I	மாதிரி II
60 — 100	10	10
50 — 60	20	10
40 — 50	30	40
30 — 40	20	30
0 — 30	20	10

மதிப் பெண்கள்	மாதிரி I மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மாதிரி II மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மொத்தம்
60 — 100	10	10	20
50 — 60	20	10	30
40 — 50	30	40	70
30 — 40	20	30	50
0 — 30	20	10	30
மொத்தம்	100	100	200

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் :

முதல் பிரிவில் (60 — 100) மாதிரி I–க்கான அலைவெண்கள்

$$\frac{100 \times 20}{200} = 10$$

(50 — 60) என்ற பிரிவில் மாதிரி I-க்கான அலைவெண்கள்

$$\frac{100 \times 30}{200} = 15$$

இதே போல, மற்ற பிரிவுகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட வேண்டும்.

அவை :

$$\frac{100 \times 70}{20} = 35; \qquad \frac{100 \times 50}{200} = 25;$$

$$\frac{100 \times 30}{200} = 15; \qquad \frac{100 \times 20}{200} = 10;$$

$$\frac{100 \times 30}{200} = 15; \qquad \frac{100 \times 70}{200} = 35;$$

$$\frac{100 \times 50}{200} = 25; \qquad \frac{100 \times 30}{200} = 15.$$

அடியிற் கண்ட பட்டியலில் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் அடைப்புகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி I	மாதிரி II
10 (10)	10 (10)
20 (15)	10 (15)
30 (35)	40 (35)
20 (25)	30 (25)
20 (15)	10 (15)

$$\chi^2 = \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(20-15)^2}{15} + \frac{(30-35)^2}{35}$$

$$+ \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(20-15)^2}{15} + \frac{(10-10)^2}{10}$$

$$+ \frac{(10-15)^2}{15} + \frac{(40-35)^2}{35} + \frac{(30-25)^2}{25}$$

$$+ \frac{(10-15)^2}{15}$$

$$= \frac{0}{10} + \frac{25}{15} + \frac{25}{15} + \frac{25}{25} + \frac{25}{15}$$

$$+ \frac{0}{10} + \frac{25}{15} + \frac{25}{35} + \frac{25}{25} + \frac{25}{15}$$

$= 0 + 1.6 + \cdot 7 + 1 + 1.6 + 0 + 1.6 + .7 + 1.0 + 1.6$

$= 9.8$

வரையற்ற பாகைகள் $= (r-1)(C-1)$

இங்கு $r = 5$ (பிரிவுகள்)

$C = 2$ (மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை)

$\therefore \ (r-1)(C-1) = (5-1)(2-1)$

$= 4 \times 1 = 4$

5% சிறப்பு வரம்பில், 4 வரையற்ற பாகைகளையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு = 9.49.

கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு 9.80

கண்டறிந்த χ^2-ன் மதிப்பு; χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிடப் பெரியதாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளை (இரு மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று பிறந்தவை என்ற சூனிய எடுகோளை) 5% வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம்.

பயிற்சி 12

(1) ஒரு பகடை 120 தடவைகள் வீசப்பட்டது. அதன் முடிவு வருமாறு:

விழுந்த முகப்புள்ளி	அலைவெண்
1	10
2	25
3	30
4	17
5	23
6	15

இப் பகடை ஒருதலைச் சார்புடையது என்ற கொள்கையை ஏற்கலாமா?

(2) ஒரு வினாவிற்கு மூன்று வகையான விடைகளை தேர்ந்தெடுத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையும், மாணவிகளின் எண்ணிக்கையும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

	ஏற்றுக் கொள்ளுதல்	கவலையின்றி இருத்தல்	நிராகரித்தல்
மாணவர்கள்	30	10	25
மாணவிகள்	15	5	15

வினாப் பற்றிய மனபான்மையில், இன வேறுபாடு சிறப்புடையதா என ஆய்க.

(3) நரம்புப் பிணியைப் பற்றிய வினுத்தாளில் ஒரு வினவிற்கான 3 வகையான விடைகளை அளித்த சாதாரண இயல்புடையவர்களின் (Normals) எண்ணிக்கையும், பிறழ்வானவர்களின் (Abnormals) எண்ணிக்கையும் வருமாறு :

	விடைகள்		
	ஆம்	கவலையற்ற	இல்லை
சாதாரண இயல்புடையவர்கள்	14	10	66
பிறழ்வானவர்கள்	27	7	66

விடைகளுக்கும், சாதாரண இயல்புடையவர்களுக்கும், பிறழ்வானவர்களுக்கும், இடையே உள்ள உறவினைக் காண்க.

(4) ஓர் உளவியல் சோதனையில் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வருமாறு :

மதிப்புகள்	அலைவெண்	மதிப்புகள்	அலைவெண்
90 — 99	5	50 — 59	35
80 — 89	17	40 — 49	10
70 — 79	30	30 — 39	3
60 — 69	50		

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் காண்க.

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களுக்கும், கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பைக் காண்க.

(5) உள மருத்துவமனையிலுள்ள நோயாளிகளைப் பற்றிய விவரங்கள் வருமாறு :

	மதிப்பீடு	
	முன்னேற்ற மடைந்தவர்கள்	முன்னேற்ற மடையாதவர்கள்
உள மருத்துவ முறை I	10	28
உள மருத்துவ முறை II	9	37

சிகிச்சை முறையும், மதிப்பீடும் தொடர்பற்றவை என்ற எடுகோளைச் சோதனைச் செய்க.

(6) அடியிற் கண்ட பட்டியலில், 100 வேலையாட்கள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற மதிப்பெண்களைப் பற்றிய விவரங்களும், அவர்களின் வேலையாற்றலின் மதிப்பீடுகளைப் பற்றிய விவரங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பரீட்சை முடிவுகளுக்கும், வேலையாற்றலுக்கும் உள்ள உறவினைக் காண்க.

		மதிப்பீடு		
		சராசரிக்குக் கீழ்	சராசரி	சராசரிக்கு மேல்
பரீட்சை முடிவு	இடைநிலைக்கு மேல்	11	25	85
	இடைநிலைக்குக் கீழ்	15	7	7

(7) ஒருவகைத் தொத்து நோய் ஒரு விலங்கினைப் பிடித்துக் கொள்வதற்குரிய வாய்ப்பு 0 25. ஒரு புது தடுப்பு மருந்தால் 8 விலங்குகள் கண்காணிக்கப்பட்டன. ஒன்ற விலங்கிற்கு அந்த நோய் வரவில்லை. 1% வரம்பில், மருந்தின் சக்தியினை ஆய்க

(8) 18–35 வயது குழுவில் 1620 பேர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் உணவுப் பழக்கத்திற்கும், கண் பார்வைத் தெளிவிற்குமான புள்ளி விவரங்கள் வருமாறு :

		உணவுப் பழக்கம்	
		புலால் வகை உண்ணாதவர்	புலால் வகை உண்ணுபவர்
கண் பார்வை	குறையுடையது	216	91
	குறையற்றது	772	541

உணவு பழக்கத்திற்கும், சண்பார்வைத் தெளிவிற்குமுள்ள உறவினை ஆய்க.

(9) யேட்ஸ் திருத்தத்தைப் பயன்படுத்தி, அடியிற்கண்ட பட்டியலுக்கு χ^2ஐக் கணக்கிடுக.

	எடை	
	விருத்தியடைந்த	விருத்தியடையாத
சாதுவான பிராணிகள்	4	2
முரட்டுத்தனமான பிராணிகள்	3	5

13. பரவற்படி ஆய்வு

(Analysis of Variance)

செய்முறை விவரங்களில் கண்டறிந்த மாறுபாட்டினை, ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு தெரிந்த காரணத்திற்கு, மூலத்திற்கு அல்லது காரணிக்கு (factor) ஒப்படைக்க ஏற்றவாறு, வேறுபட்ட பகுதிகளாக, பிரிப்பதற்கான செய்முறையே பரவற்படி ஆய்வாகும். மாறுபாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியை, வாய்ப்பு விதிகளால் ஏற்படும் வித்தியாசங் களுக்கான ஓர் அளவையுடன் ஒப்பிடுதலே இந்த செய்முறையின் மையமான கருத்தாகும். இந்தச் செய்முறையை 1923ஆம் ஆண்டில் ஆர். ஏ. ஃபிஷர் (R. A. Fisher) என்பவர் வகுத்துள்ளார். பலவகையான பிரச்சினைகளைப் பயனுள்ள வகையில் ஆய்வதற்கு இச் செய்முறை நன்கு உதவும் சார்ந்த மாறியின் மதிப்புகளிலுள்ள மாறுபாட்டைச் சார்பிலா மாறியின் மதிப்புகளிலுள்ள மாறுபாட்டுடன் ஆராயத் திட்டமிடும் பரிசோதனைகளிலிருந்து பல கூட்டுச் சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டின் சிறப்பினைச் சோதிக்கும் பிரச்சினை எழுகிறது. அத்தகைய பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண இந்தச் செய்முறை உதவுகிறது.

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட வேறுபட்ட குழுக்களை அல்லது வேறுபட்ட முறைகளை ஒப்பிட இச் செய் முறை உதவும். பொதுவாகக் கூறப்போனால் நடத்துகைகளின் (Treatments) விளைவுகளைச் சோதிக்க இதனைப் பயன்படுத்தலாம். கற்பிப்பதில் வேறுபட்ட முறைகள், குறிப்பிட்ட நோய் குணமடைவதற்கான மருந்து சோதனையில் வேறுபட்ட மருந்து வகைகள், விவசாயப் பரிசோதனையில் பல உரம் வகைகள், அர்த்தமற்ற சொற்களை மனப்பாடம் செய்வதற்கான வேறு பட்ட முறைகள் ஆகியவை நடத்துகைகளாக இருக்கலாம்.

மாறுபாடுகள் சமமாகவுள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி களிலிருந்து ராண்டம் முறையில் K மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன. K மாதிரிகளும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை என எண்ணுகிறோம். K மாதிரிகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட K கூட்டுச் சராசரிகள் பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வித்தியாச மாக உள்ளனவா என்பதைச் சோதனை செய்து, K மாதிரிகளின் கூட்டுச்சராசரிகளுக்கு முறையான முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டுச்சராசரிகள் வித்தியாசப்படுகின்றனவா என முடிவு கூறுவதற்கான சோதனையில் இச் செய்முறை பயன்படுகிறது. இந்தச் சோதனையைக் கூட்டுச் சராசரிகளின் ஒரு படித்தான நிலை (Homogeneity of means) சோதனை எனவும் சொல்லப்படு கிறது.

உரங்களின் வகையை அல்லது தரத்தைச் சார்ந்து விளைச்சல் அமையும் என்பது சாதாரணமாக நாம் எதிர்பார்க்கக் கூடியதே. எனவே, சார்பிலா மாறியான உரத்தின் (உரத்தின் அளவு அல்லது வகை) மாறுபாட்டுடன் சார்ந்த மாறியான விளைச்சலின் (விளைச்சலின் அளவு) மாறுபாட்டை ஒப்பிடலாம். இதுபோன்று, வேறுபட்ட சூழ்நிலை நிபந்தனை அல்லது அர்த்தமற்ற சொற்களை மனப்பாடம் செய்வதற்கான முறை ஆகியவை சார்பிலா மாறிகளாகவும், மீட்டறிந்த சொற்களின் எண்ணிக்கை, சிக்கலறை சோதனையில் (Maze test) ஒரு பிராணி செய்த பிழைகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை சார்ந்த மாறிகளாகவும் இருக்கலாம். எனவே, பரவற்படி ஆய்வு முறையில் ஒரே ஒரு சார்பிலா மாறிக்குப் பொருத்தமாகப் பிரிவுபடுத்தி ஆராய்வது ஒரு வழிப் பாகுபாடு (One-Way-Classification) எனவும், இரண்டு சார்பிலா மாறிகளுக்குப் பொருந்த மாகப் பிரிவுபடுத்தி ஆராய்வதை இரு வழிப் பாகுபாடு (Two-Way-Classification) எனவும் கூறுகிறோம். மூன்று அல்லது நான்கு சார்பிலா மாறிகளுக்குப் பொருத்தமாகப் பிரிவுபடுத்தி யும் ஆராயலாம்.

இப்பொழுது ஒரு-வழிப் பாகுபாட்டிற்கான மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையை விவரிப்போம்.

1. ஒருவழிப் பாகுபாடு (One Way Classification)

K நடத்துகைகளை ஒப்பிடுவதற்கான ஒரு பரிசோதனையைக் கவனிப்போம். உரவகைகள், வேறுபட்ட முறைகள், மருந்து வகைகள் அல்லது சூழ்நிலை நிபந்தனைகள் நடத்துகைகளாக

இருக்கலாம். ஒவ்வொரு நடத்துகையும் ஒரு வேறுபட்ட செய்முறைக் குழுவிற்கு (Experimental group) ராண்டம் முறையில் இடப்படுகிறது. $n_1, n_2, \ldots\ldots n_k$ என்பன 1, 2,......K குழுக்களிலுள்ள உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை. N $(=n_1+n_2+\ldots\ldots n_k)$ என்பது எல்லாக் குழுக்களிலுமுள்ள மொத்த உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை. கண்டறிந்த விவரங்களை அடியிற்கண்டவாறு பட்டியலில் அமைப்போம்.

குழு 1	குழு 2 ...	... குழு j ...	... குழு k
X_{11}	X_{12} ...	... X_{1j} ...	... X_{1k}
X_{21}	X_{22} ...	... X_{2j} ...	... X_{2k}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
X_{i1}	$X_{i,2}$ ...	... X_{ij} ...	... X_{ik}
$\vdots$			$\vdots$
$X_{ni,1}$	$X_{n2,2}$ ...	... $X_{nj,j}$ ...	... $X_{nk,k}$
$\sum_{i=1}^{ni} X_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n2} X_{i2}$	... $\sum_{i=1}^{nj} X_{ij}$ ...	... $\sum_{i=1}^{nk} X_{ik}$

முதல் ஒட்டுக்குறி குழுவின் உறுப்பினரையும், இரண்டாவது ஒட்டுக்குறி குழுவினையும் குறிக்கும்.

X_{11} என்பது முதல் குழுவில் முதல் உறுப்பினருக்கான அளவு; X_{21} என்பது முதல் குழுவில் இரண்டாவது உருப்பினருக்கான அளவு; X_{ij} என்பது j குழுவிலுள்ள i-ஆவது உருப்பினருக்கான அளவு. இதேபோல மற்றவைகளும்.

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{i1}}{n_1}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} X_{i2}}{n_2}$$

$$\vdots$$

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}}{n_k}$$

$\bar{X}_1, \bar{X}_2 \ldots\ldots \bar{X}_k$ என்பன 1, 2, ... K குழுக்களின் கூட்டுச் சராரிகள்

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{nj} X_{ij}}{N} \text{ என்பது}$$

மொத்த விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி. இதனைப் பெரிய சராசரி (Grand mean) எனவும் சொல்லலாம்.

$\sum \sum (X_{ij} - \bar{X})^2$ என்பது பெரிய சராசரியிலிருந்து தனித்த ஒவ்வொரு அளவின் (விவரத்தின்) விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை. இது விவரங்களின் மொத்த மாறுபாட்டை வர்ணிக்கும்.

$\sum (X_j - \bar{X}_j)^2$ என்பது முழுக்களிலுள்ள விவரங்களுக்கும், அந்தந்தக் குழுவின் சராசரிக்கும் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$\sum n_j (\bar{X}_j - \bar{X}^2)$ என்பது குழு சராசரிகளுக்கும் பெரிய சராசரிக்கும் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை அந்தந்தக் குழுவிலுள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கிக் கண்ட பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை.

இப்பொழுது இந்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளிடையே இருக்கும் ஓர் அடிப்படையான விதியைக் காண்போம்.

வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகையின் பிரிவுகள் (Components of the total sum of squares)

பரவற்படி ஆய்வு செய்முறை, விவரங்களின் மொத்த மாறுபாட்டினை (variance) கூட்டுமுறைப் (additive) பகுதிகளாக

பிரிக்காது ; ஆனால், வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையைக் கூட்டுமுறைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.

தனித்த மதிப்பு பெரிய சராசரியிலிருந்து பெற்ற விலக்கத்தை இரு பகுதிகளாக்குவோம். இதை அடியிற்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$(X_{ij} - \bar{X}) = (X_{ij} - \bar{X}) + (\bar{X}_j - \bar{X}).$$

இதில் $(X_{ij} - \bar{X}_j)$ என்பது ஒரு குழுவிலுள்ள மதிப்பு அந்தக் குழுவின் சராசரியிலிருந்து பெற்ற விலக்கம்.

$(\bar{X}_j - \bar{X})$ என்பது ஒரு குழுவின் சராசரி பெரிய சராசரியினின்று கண்ட விலக்கம்.

இந்த முற்றொருமையை (identity) வர்க்கமாக்கினால், நமக்குக் கிடைப்பது,

$$(X_{ij} - \bar{X})^2 = (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 + (\bar{X}_j - \bar{X})^2 + 2\,(X_{ij} - \bar{X}_j)\quad(\bar{X}_j - \bar{X})$$

ஒரு குழுவிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இவ்வாறு கணக்கிட்டு அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டால் நாம் பெறுவது

$$\sum (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 + \sum (X_j - \bar{X})^2 + 2\,(\bar{X}_j - \bar{X}) \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)$$

ஆனால், இதில்

$$\sum (X_{ij} - \bar{X}_j) = 0$$

$$\sum (X_j - \bar{X})^2 = n_j\,(\bar{X}_j - \bar{X})^2$$

எனவே,

$$\sum (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 + n_j\,(\bar{X}_j - \bar{X})^2$$

இவ்வாறு, ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் (K குழுக்களுக்கும்) கணக்கிட்டால் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை.

$$\sum\sum (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum\sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 + \sum n_j\,(\bar{X}_j - \bar{X})^2$$ ஆகும்.

இவ்வாறு வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை [$=\sum\sum (X_{ij}-\overline{X})^2$ ஐ, குழுக்களுக்குள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை [$=\sum\sum (X_{ij}-\overline{X}_j)^2$], குழுக்களுக்கிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை [$=\sum n_j(\overline{X}_j-\overline{X})^2$] என இரு கூட்டு முறைப் பகுதிகளாக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (மொ. வ. கூ) = குழுக்களுக்கு உள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (உ. வ. கூ.) + குழுக்களுக்கு இடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (இ. வ. கூ.).

குழுக்களுக்குள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும், குழுக்களுக்கிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் அதனதன் வரையற்ற பாகைகளால் வகுத்தால் முறையே குழுக்களுக்குள்ளே மாறுபாடு மதிப்பீடும் (variance estimate) [சராசரி வர்க்கமும் (Mean square)], குழுக்களுக்கிடையே மாறுபாடு மதிப்பீடும் [சராசரி வர்க்கமும்] கிடைக்கும். இவை மொத்த மாறுபாட்டின் கூட்டுமுறைப் பகுதிகளாக அமையா.

வரையற்ற பாகைகள்

மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை N ஆகும். ஒவ்வொரு மதிப்பும் பெரிய சராசரியிலிருந்து விலக்கம் பெறுவதால் மொத்த விலக்கங்கள் N ஆகும். இதில் $(N-1)$ விலக்கங்கள் வரையற்றதாகிவிடும். பெரிய சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் பெறுவதால் ஒரு வரையற்ற பாகையை இழந்துவிடுகிறோம். எனவே, மொத்த வரையற்ற பாகைகள் $N-1$ ஆகும். K குழுக்களிடையே உள்ள வரையற்ற பாகைகள் $(K-1)$ ஆகும். குழுக்களுக்குள்ளான வரையற்ற பாகைகள் $(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots\ldots$

$$+(n_k-1)=(\sum_{j=1}^{K} n_j)-K=N-K \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, வரையற்ற பாகைகள் கூட்டு முறையில் அமையும் :

$$\underset{\text{மொத்தம்}}{(N-1)} = \underset{\text{உள்ளே}}{(N-K)} + \underset{\text{இடையே}}{(K-1)}$$

எனவே,

குழுக்களுக்குள்ளே மாறுபாடு மதிப்பீடு $(S_w^2)=\dfrac{\sum\sum (X_{ij}-\overline{X}_j)^2}{N-K}$

குழுக்களிடையே மாறுபாடு மதிப்பீடு $(S_b^2) = \frac{\Sigma n_j (\overline{X}_j - \overline{X})^2}{K-1}$

S_w^2ஐப் பிழை மாறுபாடு (Error Variance) எனவும் கூறுவர்.

குழுக்களிடையே உள்ள வித்தியாசங்களிலிருந்து S_b^2 கணக்கிடப்பட்டது; குழுக்களுக்குள்ளே உள்ள விவரங்களைக்கொண்டு S_w^2 கணக்கிடப்பட்டது. எந்த ஒரு குழுவில் உள்ள வித்தியாசங்களுக்கும் மற்ற குழுக்களிலுள்ள வித்தியாசங்களுக்கும் தொடர்பு இல்லை; அதேபோல குழு சராசரிகளிடையே இருக்கக்கூடிய வேறுபாடுகளுக்கும், எந்த ஒரு குழுக்குள்ளே இருக்கும் வேறுபாடுகளுக்கும் எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை.

மாறுபாடு மதிப்பீடுகளும் எடுகோள் சோதனையும் (Variance estimates and Test of hypothesis)

மாறுபாடுகள் சமமாகவுள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து K மாதிரிகள் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டிருப்பதாக நாம் புனைந்துகொள்வோம். நாம் புனைந்துகொண்டது.

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots\ldots = \sigma K^2 = \sigma^2$ என்பதாகும்.

இந்த அனுமானம் உண்மையானதாக இருந்தால், குழுக்களுக்குள்ளே மாறுபாடு. S_w^2 முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் (σ^2-ன்) பிறழ்ச்சியற்ற (unbiassed) மதிப்பீடாகும். அதாவது, S_w^2 என்பது ராண்டம் காரணங்களால் உண்டாகக்கூடிய மாறுபாட்டின் அளவையாகும்.

இப்பொழுது, முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளில் வித்தியாசம் இல்லை என்ற எடுகோளைக் கருதுவோம். அதாவது

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_k.$$

கருதிய எடுகோள் உண்மையாக இருந்தால் S_b^2-ம் (குழுக்களினிடையே மாறுபாடும்) முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் மதிப்பீடாகும். எனவே நாம் கருதிய எடுகோள் உண்மையானால் S_w^2, S_b^2 இரண்டும் முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் (σ^2-ன்) தனித்த இரண்டு மதிப்பீடுகளாகும். அதாவது, குழுக்களுக்குள்ளே உள்ள வித்தியாசங்களைப் போலவே குழுக்களினிடையேயும் ராண்டம் காரணங்களால் மட்டும்

வித்தியாசங்கள் ஏற்பட்டிருக்குமென்ற எடுகோளை கொண்டால் S_w^2, S_b இரண்டும் மாதிரி பிழை எல்லைகளுக்குள் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே,

$$E(S_w^2) = E(S_b^2) = \sigma^2$$

F என்பது S_b^2, S_w^2 இரண்டிற்கும் உள்ள விகிதமாகும். அதாவது,

$$F = \frac{S_b^2}{S_w^2},$$ இதில் S_b^2ஐத் தொகுதி எண்ணாகக் கொள்வது முறை.

எடுகோள் உண்மையானால் $F = 1$ ஆகும். எனவே S_b^2, S_w^2 இரு மாறுபாடுகளும் சமமாக இருந்தால் முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளில் வித்தியாசம் இல்லையென முடிவு கூறலாம். F என்பது ஒன்றைவிட குறைவாக ($F < 1$) இருப்பின் சிறப்பான காரணங்கள் எதுவும் நிகழவில்லையென்பதால் எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்யலாகாது. F என்பது ஒன்றைவிடச் சிறப்பாக, பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வித்தியாசப்பட்டால் கருதிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்ய வேண்டும்.

இப்பொழுது முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளில் சிறப்பாக பொருட்படுத்தும் அளவிற்கு வித்தியாசங்கள் இருக்கின்றன என்பதே நமது முடிவாகும்.

F பட்டியலிலிருந்து, $n_1 = K - 1$, $n_2 = N - K$ வரையற்ற யற்ற பாகைகளுக்கான $F_{1-\alpha}$ (α% சிறப்பு வரம்பில் — பொதுவாக 5% அல்லது 1% வரம்பில்)-ன் மதிப்பு, கண்டறிந்த F-ன் மதிப்பைவிடச் சிறியதானால் சோதனையின் முடிவு எடுகோளுக்கு பொருத்தமில்லையென சூனிய எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படும். இவ்வாறு இல்லையேல், சோதனையின் முடிவு எடுகோளுக்கு பொருத்தமாக அமைகிறதென சூனிய எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது; இப்போது K குழுக்களில் (நடத்துகையில்) சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லையென்பதே நமது முடிவாகும்.

பரவற்டி ஆய்வுக்கான கண்ட முறைகளை அடியிற் கண்ட பட்டியலில் பொருத்தமாக அமைக்கலாம். இப் பட்டியல் பரவற்படி ஆய்வுப்பட்டியல் என வழங்கப்படும்.

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	மாறுபாடு மதிப்பீடு (சராசரி வர்க்கம்)	F	F (௫% வரம்பில்) பட்டியலின் மதிப்பு
குழுக்களுக் கிடையே	$K-1$	$\sum n_j\,(\overline{X}_j-\overline{X})^2$	$\frac{\sum n_j\,(\overline{X}-\overline{X})^2}{K-1}=S_b^2$	$\frac{S_b}{S_w}$	
குழுக்களுக் குள் (பிழை)	$N-K$	$\sum\sum\,(X_{ij}-\overline{X}_j)^2$	$\frac{\sum\sum(X_{ij}-\overline{X}_j)^2}{N-K}=S_w^2$		
மொத்தம்	$N-1$	$\sum\sum\,(X_{ij}-\overline{X})^2$			

2. கணக்கிடும் சூத்திரங்கள்

ஒரு வழி பாகுபாட்டிற்கான கணக்குகளை எளிதில் போட, கீழ்க்காணும் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (மொ. வ. கூ.)ஐக் கணக்கிட

$\sum\sum\,(X_{ij}-\overline{X})^2$-க்கு பதிலாக, ஒட்டுக் குறிகளின்றி இதனை $\sum\,(X-\overline{X})$ என எழுதி,

$$\sum X^2-\frac{(\sum X)^2}{N}=\sum X^2-\frac{T^2}{N}$$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

இதில், $\sum X^2$ என்பது ஒவ்வொரு மதிப்பின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை; T^2 என்பது எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் வர்க்கம்; N என்பது மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

(குழுக்களுக்கு) இடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் (இ. வ. கூ.) கணக்கிட :

$\sum n_j\,(\overline{X}_j-\overline{X})^2$-க்கு பதிலாக,

$\Sigma \left(\frac{T_j^2}{n_j}\right) - \frac{T^2}{N}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

இதில் T_j^2 என்பது j குழுவிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் வர்க்கம்; n_j என்பது j குழுவிலுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

$\Sigma \left(\frac{T_j^2}{n_j}\right)$ என்பது, ஒவ்வொரு குழுவிலுள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் வர்க்கங்களை அந்தந்தக் குழுவிலுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க வேண்டும். இவ்வாறு எல்லாக் குழுக்களுக்கும் கணக்கிட்டுக் கிடைத்த மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

(குழுக்களுக்கு) உள்ள வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை — உ. வ. கூ. (அதாவது, பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை — பி. வ. கூ.) கணக்கிட :

மொ. வ. கூ — ஐ

மொ. வ. கூ. = (இ. வ. கூ) + (உ. வ. கூ.) என எழுதலாம்.

எனவே,

உ. வ. கூ = (மொ. வ. கூ.) — (இ. வ. கூ.)

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1 :

பள்ளி மாணவர்களுக்கு பாடம் கற்பிப்பதற்காக மூன்று வேறுபட்ட முறைகள் வகுக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த மூன்று முறைகளை ஒப்பிட்டு இவற்றிற்கிடையே பொருட்படுத்தும் அளவுக்கு வேறுபாடு இருக்கிறதா. இல்லையா என அறிவதே சோதனையின் நோக்கமாகும் மூன்று குழுக்களைத் தேர்ந்தெடுத்து, ஒவ்வொரு குழுவிற்கு ஒவ்வொரு முறையில், பாடம் 6 மாதங்கள் கற்பிக்கப்படுகின்றன. 7ஆவது மாதத்தில் நடத்தப்பட்ட சோதனையில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்புகள் அடியிற் கண்ட பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

சூனிய எடுகோள் (H_0) = மூன்று முறைகளுக்கிடையே வேறுபாடு இல்லை.

முறைகள்			
I (மதிப்பு)	II (மதிப்பு)	III (மதிப்பு)	
1	6	4	
2	4	6	
2	6	5	
1		5	
1			
$T_1 = 7$	$T_2 = 16$	$T_2 = 20$	$T = 43$
$n_1 = 5$	$n_2 = 3$	$n_3 = 4$	$N = 12$
$\bar{X}_1 = 1.4$	$\bar{X}_2 = 5.33$	$\bar{X}_3 = 5$	$\bar{X} = 3.58$
$\frac{T_1^2}{n_1} = 9.80$	$\frac{T_2^2}{n_2} = 85.33$	$\frac{T_3^2}{n_3} = 10.000$	$\frac{T^2}{N} = 154.08$

$$T = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 6 + 4 + 6 + 4 + 6 + 5 + 5 = 43$$

$$\sum X^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2 = 201$$

$$\frac{T^2}{N} = \frac{(43)^2}{12} = 154.08$$

மொ. வ. கூ. $\sum X^2 - \frac{T^2}{N}$

$= 201 - 154.08$

$= 46.92$

முறைகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$(\text{இ. வ. கூ.}) = \sum\left(\frac{T_j^2}{N_j}\right) - \frac{T^2}{N}$$

$$= \left(\frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \frac{T_3^2}{n_3}\right) - \frac{T^2}{N}$$

$$= (9.80 + 85.33 + 100.00) - 154.08$$

$$= 195.13 - 154.08$$

$$= 41.05$$

முறைகளுக்குள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை :

(உ. வ. கூ.) = மொ. வ. கூ. — இ. வ. கூ.

$$= 46.92 - 41.05$$

$$= 5.87$$

கணக்கிட்ட விவரங்களைப் பட்டியலில் அமைப்போம்.

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	மாறுபாடு மதிப்பீடு	F	F பட்டியலிலிருந்து ($\alpha = .05$)
முறைகளிடையே	3 — 1 = 2	41.05	20.53	31.58	$F_{2,9}$ (.05 சிறப்பு வரம்பில்) =
முறைகளுக்குள் (பிழை)	9	5.87	0.65		4.26
மொத்தம்	12 — 1 = 11	46.92			

மாறுபாடு மதிப்பீடு (முறைகளிடையே,

$$= \frac{41.05}{2} = 20.53 = S_b^2$$

மாறுபாடு மதிப்பீடு (முறைகளுக்குள்)

$$= \frac{5.87}{2} = .65 = S_w^2$$

$$\therefore \quad F = \frac{S_b^2}{S_w^2} = \frac{20.53}{.65} = 31.58$$

மொத்த விவரங்கள் $(N) = 12$

மொத்த வரையற்ற பாகைகள் $= N - 1 = 12 - 1 = 11$

கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகள் (முறைகள்) $= 3$

$\therefore$ (முறைகளிடையே) வரையற்ற பாகைகள் $= K - 1$

$= 3 - 1 = 2$

$\therefore$ (முறைகளுக்குள்) வரையற்ற பாகைகள் $= N - K$

$= 12 - 3 = 9$

கண்டறிந்த F–ன் மதிப்பு $= 31.58$

2, 9 வரையற்ற பாகைகளுக்கான (.05 சிறப்பு வரம்பின்) F பட்டியலின் மதிப்பு $= 4.28$.

எனவே, கண்டறிந்த F ன் மதிப்பு $(=31.58)$

F பட்டியலின் மதிப்பை $(=4.28)$விட மிகப்பெரிதாக இருப்பதால், சூனிய எடுகோளை 5% வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, சோதனைக்காக எடுக்கப்பட்ட மூன்று கற்பிக்கும் முறைகளிடையே பொருட்படுத்தும் அளவிற்குச் சிறப்பான வேறுபாடு இருக்கிறது என முடிவு கூறுவோம்.

[குறிப்பு : சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ளுமாறு சோதனையின் முடிவு அமைந்தால், கொடுக்கப்பட்ட முறைகளிடையே பொருட்படுத்தும் அளவுக்கு வேறுபாடு இல்லையெனக் கூறிவிடலாம். ஆகவே, இந்த மூன்று முறைகளில் எந்த முறை சிறந்தது என்ற பிரச்சினையே எழாது. ஆனால், சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கின்ற நிலையில், மூன்று முறைகளிடையே பொருட்படுத்தும் அளவுக்கு வேறுபாடு இருக்கிறது எனக் கூறுகிறோம். ஆகவே, இவற்றில் எது சிறந்தது என்ற பிரச்சினை எழுகிறது. எனவே இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில்,

முறைகளை இரண்டிரண்டாக எடுத்துக் கொண்டு 't' சோதனையைப் பயன்படுத்தி விடை காண வேண்டும்.]

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2:

4 குழுக்களை, 4 வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில் சோதித்துக் கண்டறிந்த மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. சூழ்நிலைகளுக்கிடையே வேறுபாடு இருக்கிறதா என்பதனை ஆய்க.

சூழ்நிலை

I	II	III	IV
85	89	88	81
87	91	86	93
86	88	89	84
83	87	85	85
89	88	87	81
87		84	84
84		84	
82			

மதிப்புகள் பெரியவைகளாக இருக்கும்போது, கணிப்பினை எளிதாக்க ஏதாவதோர் எதேச்சை மூலத்திலிருந்து விலக்கங்களை அளந்துகொள்ளலாம். அதாவது, ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒரு மாறிலி (Constant) கூட்டப்பட்டு (அல்லது கழிக்கப்பட்டு), மாற்றி அமைத்த பட்டியலுக்குப் பரவற்படி ஆய்வின் செய்முறையைப் பயன்படுத்தலாம். இங்கே கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலின் (மேற்கண்ட) ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் 80ஐக் கழித்து (நமது வசதிக்காக), பட்டியல் கீழ்க்கண்டபடி மாற்றி அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

	சூழ் நிலைகள்				
	I	II	III	IV	
	5	9	8	1	
	7	11	6	3	
	6	8	9	4	
	3	7	5	5	
	9	7	7	1	
	7		4	4	
	4		4		
	2				
மொத்தம் (T_j)	43	42	43	18	$T = 43+42+43+18 = 146$
n_j	8	5	7	6	$N = 8+5+8+6 = 26$
$\frac{T_j^2}{n_j}$	231·13	352·8	264·14	54·0	$\Sigma \frac{T_j^2}{n_j} = 902{\cdot}07$
Σx_{ij}^2	269	364	287	68	$\Sigma \Sigma x_{ij}^2 = 988$

$$\therefore \Sigma \Sigma x_{ij}^2 = 5^2+7^2+6^2+ \ldots + \ldots + 1^2+4^2 = 988$$

$$\frac{T^2}{N} = \frac{(146)^2}{26} = 819{\cdot}85$$

$$\Sigma \left(\frac{T_j^2}{n_j}\right) = \frac{(43)^2}{8} + \frac{(42)^2}{5} + \frac{(43)^2}{7} + \frac{(18)^2}{6}$$

$$= 231{\cdot}13 + 352{\cdot}8 + 264{\cdot}14 + 54{\cdot}00$$

$$= 902{\cdot}07$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை :

$$\therefore \quad \text{மொ. வ. கூ. } (T.S.S.) = \Sigma\Sigma\, x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$= 988 - 819{\cdot}85$$

$$= 168{\cdot}15$$

சூழ்நிலைகளுக்கு இடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை :

$$\text{(சூழ்நிலைகளுக்கு) இ. வ. கூ. } (B.S.S.) = \Sigma \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{N}$$

$$= 902\ 07 - 819{\cdot}95$$

$$= 82{\cdot}22.$$

சூழ்நிலைகளுக்கு உள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை :

$$\text{உ. வ. கூ. } (W.S.S.) = (\text{மொ. வ. கூ.}) - (\text{இ. வ. கூ.})$$

$$= 168{\cdot}15 - 82{\cdot}22$$

$$= 85{\cdot}93.$$

வரையற்ற பாகைகள் :

$$\text{மொத்தம் } (N-1) = \text{இடையே } (K-1) + \text{உள்ளே } (N-K)$$

$$26-1 = (4-1) + (26-4)$$

$$25 = 3 + 22 \ [K = 4 \text{ (சூழ்நிலைகள்)}]$$

மாறுபாட்டின் ஆய்வுப் பட்டியல்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள் $(d.f.)$	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (வ. கூ.) — $(S.S.)$	சராசரி வர்க்கம் $(M.S.)$	F	பட்டியல் $F_{5\%}$ (3, 22)
இடையே (Between)	3	82·22	$\frac{82{\cdot}22}{3} = 27{\cdot}41$	$\frac{27{\cdot}41}{3{\cdot}91} = 7{\cdot}01$	3·05
உள்ளே (Within)	22	85·93	$\frac{85{\cdot}93}{22} = 3{\cdot}91$		
மொத்தம்	25	168·15			

5% சிறப்பு வரம்பில், 3·22 வரையற்ற பாகைகளுக்கு F பட்டியலின் மதிப்பு = 3·05

கண்டறிந்த F-ன் மதிப்பு = 7·01

கண்டறிந்த F-ன் மதிப்பு, பட்டியலின் F மதிப்பைவிடப் பெரியதாக இருப்பதால், நமது சூனிய எடுகோளை (சூழ்நிலைகளுக்கிடையே வேறுபாடு இல்லை என்ற எடுகோளை) 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 3 :

மூன்று பிரிவுகளைக் கொண்ட புள்ளியியல் வகுப்பு மாணவர்கள் சோதனை உருப்புகளுக்குச் (வினாக்களுக்கு) சரியாக விடையளித்த வினாக்களின் எண்ணிக்கை கீழே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. வினாக்களுக்குச் சரியான விடையளிப்பதில் பிரிவுகளுக்கிடையே வேறுபாடு இல்லை என்பதனைச் சோதனை செய்க.

சரியாக விடையளித்த வினாக்களின் எண்ணிக்கை	பிரிவு A	B	C	மொத்தம்
0	1	0	2	3
1	3	1	1	5
2	1	2	3	6
3	4	3	3	10
4	2	4	5	11
5	6	4	5	15
6	7	5	8	20
7	9	11	5	25
8	6	7	7	19
9	3	4	3	10
10	2	2	1	5
11	1	1	2	4
மொத்தம்	44	44	45	133

$N = 133$

$n_1 = 44;\ n_2 = 44;\ n_3 = 45$

$$\Sigma\Sigma x_{ij}^2 = (3\times0^2)+(5\times1^2)+(6\times2^2)+(10\times3^2)+\ldots\ldots+(5\times10^2)+(4\times11^2)$$

$$= 5625$$

$$\Sigma\Sigma xy = (3\times0)+(5\times1)+(6\times2)+(10\times3)+\ldots\ldots+(5\times10)+(4\times11)$$

$$= 797 = T$$

$$T_1 = \Sigma x_A = (1\times0)+(3\times1)+(1\times2)+\ldots\ldots+(2\times10)+(1\times11) = 258$$

$$T_2 = \Sigma x_B = (0\times0)+(1\times1)+(2\times2)+\ldots\ldots+(2\times10)+(1\times11) = 280$$

$$T_3 = \Sigma x_C = (2\times0)+(1\times1)+(3\times2)+\ldots\ldots+(1\times10)\times(2\times11) = 259$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை :

$$\text{மொ. வ. கூ. } (T.S.S.) = \Sigma\Sigma xy^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$= 5625 - \frac{(797)^2}{133}$$

$$= 848{\cdot}99$$

பிரிவுகளுக்கிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை :

$$\text{இ. வ. கூ. } (B.S.S.) = \left(\Sigma\frac{T_j^2}{n_j}\right) - \frac{T^2}{N}$$

$$= \left(\frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \frac{T_3^2}{n_3}\right) - \frac{T^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(258)^2}{44} + \frac{(280)^2}{44} + \frac{(259)^2}{45}\right] - \frac{(797)^2}{133}$$

$$= 9{\cdot}32$$

பிரிவுகளுக்குள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை:

மொ. வ. கூ. = உ. வ. கூ. (within S.S.) + இ. வ. கூ. (B.S S.)

∴ உ. வ. கூ. = (மொ. வ. கூ.) − (இ. வ. கூ.)

= 848·99 − 9·32

= 839·67

பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	சராசரி வர்க்கம்	F	F பட்டியல் 5% வரம்பில் 2, 130 d.f.
பிரிவுகளுக்கு இடையே	3 − 1 = 2	9.32	$\frac{9.32}{2}$ = 4.66	$\frac{4.66}{6.46}$ = .72	
பிரிவுகளுக்கு உள்ளே (பிழை)	130	839.67	$\frac{839.67}{130}$ = 6.46		
மொத்தம்	133 − 1 = 132	848.99			

கண்டறிந்த F-ன் மதிப்பு (= .72) ஒன்றைவிடச் சிறிதாக இருப்பதால், பிரிவுகளுக்கிடையே வேறுபாடு இல்லை என்ற சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம். எனவே, சோதனை உருப்படிகளுக்குச் சரியான விடையளிப்பதில் பிரிவுகளுக்கிடையே வேறுபாடு இல்லை என்பதே நமது முடிவாகும்.

3. பரவற்படி ஆய்வில் நாம் மேற்கொள்ளும் அனுமானங்கள்

(1) மாதிரிகள் பிரித்தெடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகள் இயல்நிலையில் அமைய வேண்டும்.

(2) பல வேறுபட்ட காரணிகளின் விளைவுகள் கூட்டு முறையில் (Additive) அமைய வேண்டும்.

(3) மாதிரிகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 13

(1) உணவு விடுதிகளில், தனி அறைகளில், பெற்றோர் களுடன் தங்கிப் படிக்கும் மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரே மாதிரி யில் அவர்களின் சமூக—பொருளாதார நிலைமையை மதிப்பிட் டனர். உயர்ந்த மதிப்பீடு உயர்மட்ட சமூக பொருளா தாரத்தைக் குறிக்கும் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. சமூக —பொருளாதார நிலைமையைப் பொறுத்தமட்டில், வேறுபட்ட இடங்களில் தங்கிப் படிக்கும் மாணவர்களினிடையே வேறுபாடு இல்லை என்ற சூனிய எடுகோளைச் சோதனைச் செய்க.

	உணவு விடுதி களில்	தனி அறைகளில்	பெற்றோர்களுடன்
N	30	30	30
$\sum x$	261	198	212

$$\sum x^2 = 5362$$

(2) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு மாறுபாட்டின் ஆய்வைப் பயன்படுத்தி $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, என்ற சூனிய எடுகோளைச் சோதனைச் செய்க.

குழுக்கள்	பிழை மதிப்புகள்					
1	16	7	19	24	31	
2	24	6	15	25	32	24
3	25	19	16	17	42	45

(3) உயர்ந்த பதவியில் உள்ள, சாதாரண வேலையில் உள்ள, வேலையில் இல்லாத தந்தையர்களின் மகன்களின் வகுப்பறை நடத்தையின் மதிப்பீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட் டுள்ளன. வேறுபட்ட நிலையில் உள்ள தந்தையர்களின் மகன்கள் வகுப்பறை நடத்தையில் மாறுபடுவதில்லை என்பதனைம் பகுத்தாய்க.

	உயர்ந்த பதவியில்	சாதாரண பதவியில்	வேலையில் இல்லாத
n	10	10	10
$\overline{X}_j$	7.40	8.30	10.56
$\sum X_{ij}^2$	649	755	1263

(4) பரவற்படி ஆய்வு என்றால் என்ன? பரவற்படி ஆய்வில் மேற்கொள்ளும் அனுமானங்களைக் கூறவும்.

14. முழுமைத் தொகுதி அளவை பயன்படா முறைகள்

(Non-parametric Methods)

முந்தைய அத்தியாயங்களில் கண்ட பெரும்பாலான சிறப்புக் காண் சோதனைகளில் மாதிரிகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலையாக இருக்குமென புனைந்து கொள்கிறோம். மாதிரிகளின் உருவ அளவு மிகச் சிறியதாக இருக்கின்ற நிலையிலும் அல்லது மாதிரிகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகள் இயல் நிலையாக அமையாத நிலையிலும் நாம் ஏற்கெனவே கண்ட பெரும்பாலான சிறப்புக் காண் சோதனைகள் தவறான முடிவுகளைத் தரலாம். ஆகவே, அத்தகைய நிலைகளில் அவற்றினால் விளைகின்ற குறைபாடுகளை முழுமைத் தொகுதி அளவை பயன்படா முறைகளைப் பயன்படுத்தி நீக்கலாம். இந்த முறையில் மாதிரி பிரித்தெடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளைப் பற்றி எந்தவிதப் புனைவும் மேற்கொள்வதில்லை. திட்டவட்டமாக அளக்க முடியாத பண்புகளை வரிசைப் படுத்தி, மதிப்பிடங்களின் (Ranks) அடிப்படையில் கணிப்புகளை செய்து இந்த முறையினால் சோதனைகள் செய்யலாம். எனவே, அத்தகைய முழுமைத் தொகுதி அளவை பயன்படா முறைகளில் சிலவற்றை இங்குக் காண்போம்.

1. குறியிடுச் சோதனை (Sign test)

குறியிடுச் சோதனையில் பெறுமானங்களை (Numerical Values) அப்படியே பயன்படுத்தாமல் அம் மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக + அல்லது − குறிகளைப் பயன்படுத்துவதால் அந்தச் சோதனை அப் பெயர் பெற்றது. இது மிகவும் எளிய, பொதுவாக

பயன்படுத்தப்படும் சோதனையாகும். இரு சூழ்நிலைகளின் வேறுபாட்டை காண நடத்தும் ஆராயச்சியில் இச் சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம். நாம் ஆய்கின்ற மாறி, தொடர் பரவலைப் (Continuons distribution) பின்பற்றுவதாய் இருத்தல் வேண்டும் என்பதன்றி வேறு எவ்வித அனுமானங்களையும் நாம் மேற்கொள்ள வேண்டுவதில்லை. இரண்டு மாதிரிகளிலுள்ள விவரங்கள் சோடிகளாகப் பிரிக்கத் தக்க வகையில் அமைதல் வேண்டும். இரண்டு சார்புடைய மாதிரிகளின் வேறுபாட்டின் சிறப்பை அறிய இந்தச்சோதனை பயன்படுத்தப் படும்.

முறை : X^A என்பது முதல் சூழ்நிலையில் ஒரு நபர் பெற்ற மதிப்பாகவும், X_B என்பது இரண்டாவது சூழ்நிலையில் அதே நபர் பெற்ற மதிப்பாகவும் கொண்டால்,

$P(X_A > X_B) = P(X_A < X_B) = \frac{1}{2}$ என்பதே நாம் மேற்கொள்ளும் சூனிய எடுகோளாகும். அதாவது, P என்பது ஒரு + குறிக்கான ஊக அளவை எனவும், q என்பது ஒரு — குறிக்கான ஊக அளவை எனவும் கொண்டால், நாம் மேற்கொள்ளும் சூனிய எடுகோள் $P = q = \frac{1}{2}$ என்பதாகும்.

A எனும் ஒருவர் பெற்ற இரு மதிப்புகள் அல்லது இரு தரங்கள் (Ranks) X_A, Y_A எனில், X_A-க்கும், Y_A-க்குமுள்ள வித்தியாசம் + குறி உள்ளதா அல்லது — குறி உள்ளதா என்பதே இச் சோதனையில் பயன்படுத்தப்படும் அடிப்படைக் கருத்தாகும். + குறிகளும் — குறிகளும் சமமான எண்ணிக்கையில் இருக்கும் என்பதே நமது சூனிய எடுகோள் ஆகும். இக்குறிகளுக்கிடையே வேறுபாடு மிகவும் குறைந்தோ அல்லது மிக அதிகமாகவோ இருந்தால் சூனிய எடுகோள் தள்ளப்படும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட சோடி மதிப்புகளின் வித்தியாசம் பூச்சியமானல் (அதாவது, $X_A = Y_A$ அல்லது $X_A - Y_A$ என்ருல்) அந்த சோடி பயனற்றது என விலக்கப்படும். N என்பது சோடிகளின் எண்ணிக்கை யெனில், ஒரு சோடியின் மதிப்புகளின் வேறுபாடு பூச்சியமானல் $(N - 1)$ சோடிகளின் குறிகளை மட்டுமே எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் + குறிகளும் — குறிகளும் தோன்றுவதற்கான ஊக அளவை ஈருறுப்புப பரவலைக் கொண்டு கணக்கிடலாம். அந்தப் பரவலில் [அதாவது, $(q + p)^N$-இல்], $p = q = \frac{1}{2}$ ஆகும்; N என்பது சோடிகளின்

எண்ணிக்கையாகும். 25 சோடிகளுக்கு மேற்படாத மாதிரிகளில் சூனிய எடுகோளின் அடிப்படையில் x அல்லது அதற்கும் குறைந்த எண்ணிக்கையில் குறிகள் தோன்றுவதற்கான ஊக அளவை பட்டியலில்[1] (ஏற்கெனவே தயாரிக்கப்பட்ட பட்டியலில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டாக, 19 சோடி மதிப்புகளை ஆராய்ந்ததில் 16 + குறிகளும், 2 — குறிகளும், ஒன்று பூச்சியம் எனக் கொள்வோம். எனில், இங்கு $x = 2$, $N = 19 - 1 = 18$. பட்டியலின்படி இரண்டு அல்லது அதற்கும் குறைந்த எண்ணிக்கையில் குறிகள் தோன்றுவதற்கான ஊக அளவை .001 ஆகும். + குறிகளும், — குறிகளும் எது குறைந்த எண்ணிக்கையில் உள்ளதோ அதனை x என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் 2 அல்லது அதற்கும் குறைந்த எண்ணிக்கையில் குறிகள் தோன்றுவதற்கான ஊக அளவை ஈருறுப்புப் பரவல் கொண்டு கணக்கிடலாம். அதாவது $P(x \leq 2)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டும். ஈருறுப்புப் பரவலில், சரியா x வெற்றிகளுக்கான ஊக அளவை,

$$P(x) = \binom{N}{x} p^x \, . \, q^{N-x}, \text{ ஆகும்.}$$

$P(x \leq 2)$ என்பது $P(0) + P(1) + P(2)$ ஆகும். எனவே,

$$P(x \leq 2) = \binom{N}{0} p^0 q^{n-0} + \binom{N}{1} p^1 q^{n-1} + \binom{N}{2} p^2 q^{n-2}$$

இங்கு $p = q = \frac{1}{2}$

$N = 18$

$$\therefore \quad P(x \leq 2)$$

$$= \binom{18}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{18-0} + \binom{18}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{18-1}$$

$$+ \binom{18}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{18-2}$$

$$= .001$$

---

1. Sidney Siegel, Nonpanametric statisftcs for behavioral sciences (Mc Graw - Hill Co., Table D; Page 250.)

சிறப்பு வரம்பு .05 எனில், கணக்கிட P-ன் மதிப்பானது .05 க்குச் சமமாகவோ அல்லது .05-க்குக் குறைவாகவோ இருந்தால் சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

A, B என்ற இருநிலைகளில், 25 கடினமான வார்த்தைகளை மனப்பாடம் செய்வதற்கு எந்தச் சூழ்நிலை சிறந்தது என அறிவதற்காக நடத்தப்பட்ட ஆராய்ச்சியில், 10 பள்ளி மாணவர்களை இவ்விரு சூழ்நிலைகளிலும் ஆராய்ந்ததில் அம்மாணவர்கள் சோதனையில் பெற்ற மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. சூழ்நிலை *A*, சூழ்நிலை *B*-யைக் காட்டிலும் சிறந்தது என்ற எடுகோளைச் சோதனை செய்யவும்.

பள்ளி மாணவர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சூழ்நிலை *A* மதிப்புகள்	15	49	31	36	10	11	19	15	40	16
சூழ்நிலை *B* மதிப்புகள்	19	30	26	8	10	6	17	13	22	8

பள்ளி மாணவர்கள்	சூழ்நிலை *A* (மதிப்புகள்) *X*	சூழ்நிலை *B* (மதிப்புகள்) *Y*	$X-Y$	$(X-Y)$-ன் குறி
1	15	19	− 4	−
2	49	30	+ 19	+
3	31	26	+ 5	+
4	36	8	+ 28	+
5	10	10	0	0
6	11	6	+ 5	0
7	19	17	+2	+
8	15	13	+ 2	+
9	40	22	+ 18	+
10	16	8	+ 8	+

இதில் + குறிகள் = 8

− குறி = 1

மொத்த சோடி மதிப்புகள் = 10

ஒரு மாணவர் இரு சூழ்நிலைகளிலும் சம மதிப்புகள் பெற்றதால், $N = 10 - 1 = 9$ ஆகும்.

x = குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள குறிகள்

= 1

எனவே, ஒன்று அல்லது அதற்கும் குறைந்த எண்ணிக்கையில் குறிகள் தோன்றுவதற்கான ஊக அளவை($=P$) (பட்டியலில்)= .20

அதாவது, பட்டியலில் $x = 1$ என்ற பத்தியில் $N = 9$ என்ற வரிசையில் அமையும் மதிப்பே .020 ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலைக் கொண்டு கணக்கிட்டால், $\rho\ (\leq 1) = P(0) + P(1)$. அதாவது, $P\ (x \leq 1)$

$$= \binom{N}{0} P^0 q^{n-0} + \binom{N}{1} P^1 q^{n-1}$$

$$= \binom{9}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \binom{9}{1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^9 + 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= \frac{1}{512} + \frac{9}{512}$$

$$= .000 + 018$$

$$= 0.20$$

எனவே ஊக அளவை $(P) = .020$.

கண்டறிந்த ஊக அளவை (·02), .05-யினும் சிறியதாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்து மாற்று எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம் (5% வரம்பில்) எனவே, சூழ்நிலை A-க்கும், சூழ்நிலை. B-க்கும் வேறுபாடு இல்லையென்பதை தள்ளி, சூழ்நிலை A, சூழ்நிலை Bஐக் காட்டிலும் சிறந்தது என முடிவு கூறுகிறோம்.

2. இடைநிலைச் சோதனை (Median test)

இடைநிலைச் சோதனை என்பது இரண்டு சார்பற்ற மாதிரிகளின் (அல்லது குழுக்களின்) இடைநிலைகளை ஒப்பிடுவதற்கான ஒரு சோதனையாகும்·

விளக்கமாக கூற போனால், இடைநிலைச் சோதனையானது சார்பற்ற இரண்டு குழுக்கள் அல்லது மாதிரிகள் (மாதிரிகளின் உருவ அளவு சமமாக இருக்க வேண்டுவதில்லை) ஒரே இடைநிலையை உடைய இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளினின்று எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான ஊக அளவையைக் கணக்கிடும் ஒரு முறையாகும். சூனிய எடுகோளாக, இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே இடைநிலை உடைய இரு முழுமைத் தொகுதிகளினின்று பிறந்தவை எனக் கொள்ளலாம்; மாற்று எடுகோளாக ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலை மற்றொரு முழுமைத் தொகுதியின் இடை நிலையினின்று வேறுபட்டது (இது ஓர் இரு முனைச் சோதனை) என்றோ, ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலை மற்றொன்றதனுடையதைவிட அதிகம் அல்லது குறைவு (இஃது ஓர் ஒருமுனைச்சோதனை) என்றோ கொள்ளலாம்· இரண்டு குழுக்களின் மதிப்புகள் வரிசைப்படுத்தப்பட்டவைகளாக இருக்கும் போது இச்சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம்.

முறை : இடைநிலைச் சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது முதலில் இரண்டு குழுக்களின் (மாதிரிகளின்) மதிப்புகளையும் ஒன்றாக இணைத்து, அம் மதிப்புகளை ஏறும் வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ அமைத்து இடைநிலையைக் கண்டறிதல் வேண்டும். இப்போது ஒவ்வொரு குழுக்களிலும், இடைநிலை மதிப்புக்கு பெரிய மதிப்புகளின் எண்ணிக்கைகளையும், இடைநிலைக்கு சமமான அல்லது அதற்கும் சிறிய மதிப்புகளின் எண்ணிக்கைகளையும் காண வேண்டும். பின்னர், இவ்விவரங்களைக் கொண்டு அடியிற் கண்டவாறு ஓர் இருவழி (இணை) பட்டியல் அமைக்க வேண்டும்.

	குழு I	குழு II
இடைநிலைக்கு மேல் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை	*A*	*B*
இடைநிலைக்கு சமமான அல்லது அதற்கும் கீழ் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை	*C*	*D*

இரு குழுக்களும் ஒரே இடைநிலையைக் கொண்ட இரு முழுமைத் தொகுதிகளினின்று எடுக்கப்பட்டிருந்தால், ஒவ்வொரு குழுவின் மதிப்புகளிலும் பாதி, இடைநிலைக்கு மேலும், மறுபாதி மதிப்புகள் இடைநிலைக்குக் கீழும இருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம். அதாவது *A*, *C* இரண்டும் ஏறத்தாழ சமமாகவும் *B*, *D* இரண்டும் ஏறத்தாழ சமமாகவும் இருக்கும் எனலாம். மேற்கூறியவாறு இருவழி பட்டியல் அமைத்த பின்னர் χ^2ஐப் பயன்படுத்தி இடைநிலைகளின் வேறுபாட்டின் சிறப்பை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

எடுத்துக்காட்டாக, அடியிற் கண்ட விவரங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

மாதிரி I 10 10 10 12 15 17 17 19 20 25 25 26

மாதிரி II 6 7 8 8 12 16 19 19 22

முதல் மாதிரியின் உருவ அளவு = 12

இரண்டாவது ,, ,, = 9

எனவே மொத்த விவரங்கள் = 21

இப்போது இரண்டு மாதிரிகளின் மதிப்புகளையும் இணைத்து, வரிசைப்படுத்தி அமைப்போம்.

6 7 8 8 10 10 10 12 15 (16) 17 17 19 19 19

20 22 22 25 26.

இதில் இடைநிலை (நடுமதிப்பு) = 16 ஆகும்.

முதல் மாதிரியில் இடைநிலைக்கு மேல் எத்தனை மதிப்புகள் உள்ளன என்பதையும், இடைநிலைக்கு சமமான அல்லது அதற்கும் கீழ் எத்தனை மதிப்புகள் உள்ளன என்பதையும் காண்போம்.

முதல் மாதிரியில் இடைநிலைக்கு மேல்

(16-க்கு மேல்) = 7 மதிப்புகள்

,, ,, இடைநிலைக்கு சமமான

அல்லது அதற்கும் கீழ் = 5 மதிப்புகள்

இதேபோல்,

இரண்டாவது மாதிரியில் இடைநிலைக்கு மேல் = 3 மதிப்புகள்

இரண்டாவது மாதிரியில் இடைநிலைக்குச் சமமான அல்லது அதற்குக் கீழ் } = 6 மதிப்புகள்

இப்போது ஓர் இருவழிப் பட்டியல் அமைப்போம்.

	மாதிரி I	மாதிரி II	மொத்தம்
இடைநிலைக்கு மேல் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை	7 A	3 B	10
இடைநிலைக்குச் சமமான அல்லது அதற்குக் கீழ் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை	5 C	6 D	11
மொத்தம்	12	9	21

அறை அலைவெண்கள் மிகச் சிறியவைகளாக இருப்பதால் யேட்ஸ் திருத்தத்தைச் செய்து திருத்தமான χ^2 கணக்கிட வேண்டும்.

$$\text{திருத்தமான } \chi^2 = \frac{N\left(|AD - BC| - \frac{N}{2}\right)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

$$= \frac{21\left(|17\times6-3\times5|-\frac{21}{2}\right)^2}{10\times11\times12\times9}$$

$$= \frac{21\ (|42-15|-10\cdot5)^2}{10\times11\times12\times9}$$

$$= \frac{21\ (27-10\cdot5)^2}{10+11\times12\times9} - \frac{2\ \times(16\cdot5)^2}{10\times11\times12\times9}$$

$$= \cdot51$$

திருத்தமான χ^2 = 51.

இது ஓர் 2×2 இணைப்பட்டியலாதலால் வரையற்ற பாகைகள்

$$= (2-1)\ (2-1)\ 1\times1=1.$$

1 வரையற்ற பாகையுடைய χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு 5% சிறப்பு வரம்பில் = 3·84

எனவே, கண்டறிந்த χ^2–ன் மதிப்பு (= ·51) χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிட சிறியதாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம் (5% சிறப்பு வரம்பில்).

எனவே, 5% சிறப்பு வரம்பில், முழுமைத் தொகுதிகளின் இடைநிலைகளிடையே வேறுபாடு இல்லை எனக் கூறுவோம். அதாவது அந்த இரு மாதிரிகளும் ஒரே இடைநிலையை உடைய இரு முழுமைத் தொகுதிகளினின்று எடுக்கப்பட்டவை எனக் கூறுவோம்.

3. குருஸ்கால்–வாலிஸ் சோதனை (Kruskal-Wallis test).

குருஸ்கால்–வாலிஸ் சோதனையானது 'K' சார்பற்ற மாதிரிகள் வேறுபட்ட முழுமைத் தொகுதிகளினின்று எடுக்கப்பட்டவையா என அறிய உதவும் சோதனை ஆகும். மாதிரிகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகள் சூழ்நிலைகளின் விளைவால் (வாய்ப்பு விதிகளால்) தோன்றியவையா அல்லது அடிப்படையில் வேறுபட்ட முழுமைத் தொகுதிகளினின்றுதோன்றியதால் ஏற்பட்டவையா என அறிவதே இதன் அடிப்படை நோக்கமாகும். இந்தச் சோதனை முன்றியில், K மாதிரிகள் ஒரே சராசரியைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதிகளினின்று பிறந்தவை

என்னும் சூனிய எடுகோள் சோதிக்கப்படுகிறது. நாம் ஆயும் மாறியானது தொடர் பரவலை (Continuous distribution) பின் பற்றுகிறது எனவும், மாறியின் பல மதிப்புகளும் வரிசைப்படுத் தும் வகையில் உள்ளன எனவும் நாம் மேற்கொள்ளும் இவ் விரண்டு அனுமானங்களின் அடிப்படையில் இச் சோதனை செயல்படுகிறது.

முறை : முதலாவதாக K மாதிரிகளின் மதிப்புகளை ஒன்றாக இணைத்து அவற்றை வரிசைப்படுத்த வேண்டும். மிகக் குறைந்த மதிப்பின் தரம் 1, அதற்கடுத்த குறைந்த மதிப்பின் தரம் 2, இவ்வாறாக மொத்த உறுப்புகளின் மதிப்புகள் அனைத்தும் தரங் கள் பெறுகின்றன. பின்னர் ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் உள்ள மதிப்புகளின் தரங்களின் மொத்த தரங்களைக் கணக்கிட வேண் டும். இந்த மொத்தங்கள் தம்முள் மிகவும் வேறுபட்டிருக்கின் றனவா என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டு சோதனையை மேற்கொள்கிறோம்.

K மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று (ஒரே சராசரியையுடைய முழுமைத் தொகுதிகளினின்று) பிறந்தவை களாக இருந்தால், (அதாவது நமது சூனிய எடுகோள் உண்மை யானதாக இருந்தால்) அடியிற் கொடுக்கப்பட்ட H என்ற அளவை χ^2 பரவலைப் பின்பற்றுகிறது என நிறுவ முடியும்.

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{K} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

இதில்

K = மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை

n_j = 'j' என்ற மாதிரியில் உள்ள உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை (அதாவது 'j' மாதிரியின் உருவ அளவு)

$N = \Sigma n_j$ = மொத்த உறுப்பினர்களின் (எல்லா மாதிரி களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை)

R_j = 'j' என்ற மாதிரியின் தரங்களின் கூட்டுத் தொகை.

எனவே, கணக்கிடப்பட்ட H-ன் மதிப்பு, குறித்த சிறப்பு வரம்பில், $(K-1)$ வரையற்ற பாதைகளுக்கான χ^2 பட்டியல் மதிப்பைவிடப் பெரிதாக இருந்தால் சூனிய எடுகோள் தள்ளுபடி செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

மாதிரி I	மாதிரி II	மாதிரி III
96	82	115
128	124	149
83	132	166
61	135	147
101	109	

மூன்று மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று எடுக்கப்பட்டவையா என ஆய்க.

(குருஸ்கால்-வாலிஸ் சோதனையைப் பயன்படுத்தவும்.)

இதில் மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை $(K) = 3$

முதல் மாதிரியின் உருவ அளவு$(n_1) = 5$

இரண்டாவது ,, ,, $(n_2) = 5$

மூன்றாவது ,, ,, $(n_3) = 4.$

$\therefore \quad N = n_1 + n_2 + n_3 = 14$, அதாவது, மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $(N) = 14.$

முதலில் மூன்று மாதிரிகளிலுமுள்ள மதிப்புகளை இணைத்து வரிசைப்படுத்துவோம்.

இணைத்தால்

96 | 128 | 88 | 61 | 101 | 82 | 124 | 132 | 135 | 109 |

115 | 149 | 166 | 147

வரிசைப்படுத்திஞல் (ஏறும் வரிசையில்)

61 82 83 96 101 109 115 124

128 132 135 147 149 156 என அமையும்.

மிகக் குறைந்த மதிப்பு தரம் 1-ம், அதற்கடுத்த குறைந்த மதிப்புக்குத் தரம் 2-ம், இவ்வாறு மற்ற மதிப்புகளுக்குத் தரங்கள் கொடுத்துக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

மதிப்புகள் ஏறும் வரிசையில்	தரங்கள்
61	1
82	2
83	3
96	4
101	5
109	6
115	7
124	8
128	9
132	10
135	11
147	12
149	13
166	14

மூன்று மாதிரிகளுக்கும் தனித்தனியாகத் தரங்களை அடுத்து வரும் பட்டியலில் கண்டவாறு அமைப்போம்.

மாதிரி I	தரம்	மாதிரி II	தரம்	மாதிரி III	தரம்
96	4	82	2	115	7
128	9	124	8	149	13
83	3	132	10	166	14
61	1	135	12	147	12
101	5	109	6		
$R_1 = 22$		$R_2 = 37$		$R_3 = 46$	

R_1 = முதல் மாதிரியின் தரங்களின் மொத்தம்

R_2 = இரண்டாவது ,, ,,

R_3 = 3ஆவது ,, ,,

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{K} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

இங்கு 3 மாதிரிகள் உள்ளதால்

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left[\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \frac{R_3^2}{n_3}\right] - 3(N+1)$$

இதில்,

$$N = 14$$

$$n_1 = 5;\ n_2 = 5;\ n_3 = 4.$$

$$R_1 = 22;\ R_2 = 37;\ R_3 = 46$$

ஆகவே,

$$H = \frac{12}{14(4+1)}\left[\frac{(22)^2}{5} + \frac{(37)^2}{5} + \frac{(46^2}{4}\right] - 3(14+1)$$

$= 6{\cdot}4$

$H = 6{\cdot}4.$

மூன்று மாதிரிகள் உள்ளதால்,

வரையற்ற பாகைகள் $= 3-1=2.$

எனவே, 2 வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு, 5% சிறப்பு வரம்பில் = 5·99

ஆகவே, கண்டறிந்த H-ன் மதிப்பு ($=6{\cdot}4$) χ^2 பட்டியலின் மதிப்பைவிடப் பெரிதாக இருப்பதால் சூனிய எடுகோளான மூன்று மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியினின்று எடுக்கப் பட்டவை என்பதைத் தள்ளுபடி செய்கிறோம். எனவே, இந்த மூன்று மாதிரிகள் வேறுபட்ட முழுமைத் தொகுதிகளினின்று எடுக்கப்பட்டவை என முடிவு கூறலாம்.

பயிற்சி 14.

(1) ஒரே மாதிரியான உறுப்பினர்களுடைய ஒரு சோடியில், ஓர் உறுப்பினருக்குப் பிரத்யேகமான பயிற்சி அளிக்கப்படுகிறது மற்றோர் உறுப்பினருக்குப் பயிற்சி அளிப்பதில்லை. இதேபோல 10 சோடிகளைக் கொண்ட ஒரு குழுவில் உறுப்பினர்கள் ஒரு சோதனையில் பெற்ற மதிப்புகள் வருமாறு :

சோடிகள்	பயிற்சி பெற்ற	பயிற்சி பெறாத
1	15	12
2	18	15
3	10	10
4	15	16
5	18	18
6	12	10
7	15	12
8	16	13
9	14	12
10	22	19

பயிற்சி பெற்றவர்கள் பயிற்சி பெருதவர்களைவிடச் சிறந்தவர்களா என்பதைக்குறியீடுச் சோதனையைப் (Sign test) பயன்படுத்தி ஆய்க.

(2) 10 ஆண்களும் 20 பெண்களும் ஒரு வினுத்தாளுக்கு விடையளிக்கையில், கீழ்க்கண்ட மதிப்பெண்களைப் பெற்றனர். விடையளிப்பதில் ஆண்களும், பெண்களும் வேறுபடுகின்றனரா என்பதை இடைநிலைச் சோதனையை பயன்படுத்தி ஆய்க.

ஆண்கள் (மதிப்புகள்)	பெண்கள் (மதிப்புகள்)
21	22
30	23
37	25
46	31
47	34
47	34
48	35
49	37
51	40
60	41
	42
	43
	43
	43
	45

3. 3 வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில் 3 குழுக்களைச் சோதனை செய்ததில் கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. சூழ்நிலைகளுக்கிடையே வேறுபாடு இருக்கின்றதா என்பதைக் குருஸ்கால் வாலீஸ் சோதனையைப் பயன்படுத்தி ஆய்க.

குழு	மதிப்புகள்						
1 :	16	7	19	24	31		
2 :	24	6	15	25	32	24	29
3 :	16	15	18	19	6	13	18

15. உடன்தொடர்பின் வேறு முறைகள்

(Other Correlation Methods)

இரு மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை அளக்க பெருக்க மொமென்டு உடன் தொடர்பும், ஒரு மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு அதற்கு இணையான மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிடத் தொடர்பு போக்குக் கோடுகளும் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதனை ஏற்கெனவே விவரித்தோம். உளவியல், சோதனை மதிப்புகளுக்கு (Test scores) இடையேயுள்ள தொடர்பையும், செயல் அளவைகளுக்கு (Performance measures) இடையேயுள்ள தொடர்பையும் அறிய பெருக்க மொமென்டு முறை ஒரு சிறந்த அளவையாக விளங்குகிறது. ஆனால், பயன்முறை உளவியல், தொழில் உளவியல் போன்றவற்றில் பண்புகளைத் திட்டவட்டமாக அளக்கமுடியாத நிலையில் இருப்பதால், பண்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை அளக்கப் பெருக்க மோமென்டு உடன் தொடர்பைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆகவே, பண்புகளை அளக்கமுடியாத நிலையிலும், கண்டறிந்த விவரங்களை நிரல்படுத்தித் தரங்கள் (Ranks) பெறக்கூடிய சமயங்களிலும், மாறிகளின் மெய்யான மதிப்புகள் பெறக்கூடிய வகையில் அமையாத நிலையிலும், மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டில் அமையாத நிலையிலும், பண்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை அளக்க வேறு உடன் தொடர்பு முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனவே, அம்முறைகளில் சிலவற்றை இங்கே காண்போம்.

1. தரத் தொடர்பு (Rank Correlation)

நிறச் சேர்க்கை, நேர்மை, சமூகப் பொருத்தப்பாடு, விளையாட்டில் திறமை, விற்பனைத் திறமை போன்ற பண்புகளை அளக்க முடியாத நிலையில் அவற்றின் தர மதிப்புகள் பெறப்படலாம். அத்தர மதிப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு

அப் பண்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை எடுத்துக் காட்டும் கண்டறிந்த விவரங்களை வரிசைப்படுத்தி, தரங்கள் இட்டு, தொடர்புப் போக்குக் கோடு நேர்கோடாக அமையும் என அனுமானத்தின் அடிப்படையில், தொடர்புக்கு ஓர் அளவையாக,

(ரோ, $\rho = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$ என்ற ஸ்பியர்மென் தரத் தொடர்புக் கெழு அமையும். ρ-ன் மதிப்பு + 1-க்கும் −1க்கும் இடையில் இருக்கும். பியர்ஸன் உடன் தொடர்புக் கெழுவிற்கு r-ன் மதிப்புக்கு) விளக்கம் கூறியதைப் போலவே, ρ-ன் மதிப்புக்கு விளக்கம் தர வேண்டும். மேலே தரப்பட்ட வாய்பாட்டில், n என்பது கொடுக்கப்பட்ட இணை விவரங்களின் எண்ணிக்கையாகும் (அதாவது, சோடி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையாகும்). d என்பது தர மதிப்புகளின் வேறுபாடு ஆகும். தன்மைகளை மதிப்பிடுகின்ற சமயங்களிலும், விவரங்களின் எண்ணிக்கை சிறியதாக (25-க்குக் கீழ்) இருக்கும் போதும், இந்த முறையை இரு பண்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினை அறியப் பயன் படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 1 :

ஓர் அழகுப் போட்டியில் 7 நங்கையர்களுக்கு இரு நீதிபதிகள் அளித்த மதிப்புகள் (தரங்கள்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அந்த இரு நீதிபதிகளும் பொதுவான அழகு கண்ணோட்டம் உடையவர்களா என ஆய்க.

நங்கைகள்	நீதிபதி X (மதிப்பெண்)	நீதிபதி Y (மதிப்பெண்)
அ	2	2
ஆ	1	5
இ	4	6
ஈ	3	1
உ	6	4
ஊ	5	3
எ	7	7

நங்கைகள்	நீதிபதி X (தர மதிப்பு) R_1	நீதிபதி Y (தர மதிப்பு) R_2	$d = R_1 - R_2$	d^2
அ	2	2	0	0
ஆ	1	5	−4	16
இ	4	6	−2	4
ஈ	3	1	2	4
உ	6	4	2	4
ஊ	5	3	2	4
எ	7	7	0	0
				$\Sigma d^2 = 32$

$$\Sigma d^2 = 32; \qquad \rho = 1 - \frac{6 \times \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$n = 7 =$ சோடிகளின் எண்ணிக்கை

$$\therefore \quad \rho = 1 - \frac{6 \times 32}{7 \times 48}$$

$$= 1 - \tfrac{4}{7} = \tfrac{3}{7} = .43$$

$$\rho = .43$$

இரு நீதிபதிகளும் ஓரளவிற்குப் பொதுவான அழகு கண்ணோட்டமுடையவர்கள்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2 :

விற்பனையாளர்	தொழிலில் அனுபவம் (வருடத்தில்)	தகுதியை அனுபவத்தின் அடிப்படையில் தர மதிப்பிடல் R_1	தகுதியை திறமையின் அடிப்படையில் தர மதிப்பிடல் R_2	$d = R_1 - R_2$	d^2
குமார்	5	5	1	4	16
ராஜன்	10	1	2	−1	1
பாபு	2	6	4	2	4
ரமேஷ்	8	2	3	−1	1
சுரேஷ்	6	3.5	5	−1.5	2.25
சந்திரன்	6	3.5	6	−2.5	6.25
					$\Sigma d^2 = 30.50$

$$\Sigma d^2 = 30.50$$

$n = 6 =$ சோடிகளின் எண்ணிக்கை

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 30.50}{6 \times (36-1)}$$

$$= 1 - \frac{183}{210}$$

$$= 1 - 0.86 = 0.13$$

$$\rho = 0.13$$

விற்பனைத் திறமுடைமைக்கும், அந்தத் தொழிலில் கால அனுபவத்திற்கும் இடையேயுள்ள மிகவும் குறைந்த, அற்ப மான தொடர்பினை இது (ρ) காட்டும்.

[**குறிப்பு** : கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்குள் ஒத்தன (ties) இருக்கும் போது, ஒத்தன விவரங்களின் தர மதிப்புகளின் சராசரி தர மதிப்பையே அவற்றின் தர மதிப்புகளாகக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு 2–ல் தகுதியை அனுபவத்தின் அடிப்படையில் தரங்களைக் கொடுக்கும்போது, நீண்ட கால அனுபவமுடைய ராஜனுக்குத் தர மதிப்பு 1–ம் அதற்கும் அடுத்த 8 வருட அனுபவமுடைய ரமேஷுக்குத் தர மதிப்பு 2-ம், இது போன்று மற்றவர்களுக்கும் தரங்கள் கொடுக் கப்பட்டுள்ளன. ஆனால் சுரேஷ், சந்திரன் ஆகிய இருவரும் 6 வருட அனுபவமுடையவர்களாக இருப்பதால் தரங்கள் 3–ம், 4-ம் அல்லது 4–ம், 3-ம் இவ்விருவருக்குக் கொடுத்து, 3, 4 ஆகிய வற்றின் கூட்டுச் சராசரியான, 3.5ஐ இவ்விருவரின் உண்மை யான தர மதிப்பாகக் கொள்ள வேண்டும்.]

2. **டெட்ராகோரிக் உடன் தொடர்புக்கெழு** — r_t (Tetrachoric Correlation coefficient – r_t)

இரு பண்புகளும், ஒவ்வொன்றும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கக்கூடியவாறு அமைந்தால் அவ்விரு பண்புகளுக்கு இடையேயுள்ள உறவினைக் காண டெட்ராகோரிக் r_tஐப் பயன் படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, பள்ளி மாணவர்களின் நுண்ணறிவிற்கும், அவர்களின் சமூக பக்குவத்திற்குமிடையே உள்ள உறவினைக் காண இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம். சராசரி நுண்ணறிவிற்கு மேல் (நுண்ணறிவுடையவர்கள்) என நுண்ணறிவை இரு பகுதிகளாகவும், அதே போல் சமூக பக்கு

வத்தை, சமூக பக்குவமடைந்த, சமூக பக்குவமடையாத என இரு பகுதிகளாகவும் பிரிக்கலாம்.

டெட்ராகோரிக் r_t ஐப் பயன்படுத்துங்கால், கொடுக்கப்பட்ட இரு பண்புகளும் தொடர் மாறிகள் எனவும், அவை இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகின்றன எனவும் புனைந்து கொள்கிறோம். டெட்ராகோரிக் r_t ஐக் கணிக்கிடுவதற்கான சூத்திரம் மிகவும் சிக்கலானதாக இருப்பதால், நடைமுறையில் இந்தச் சூத்திரத்திற்குப் பதிலாக, இதற்குத் தோராயமான சூத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

இணைப் பட்டியல்: அளக்க முடியாத இரு பண்புகளை ஒவ்வொன்றும் பல பகுதிகளாகப் பிரித்து, அவ்விரு பண்புகளுக்குமிடையேயுள்ள உறவினைக் காணலாம். A என்ற பண்பு, $A_1, A_2 \ldots A_K$ என்ற 'K' துணைப் பண்புகளை உடையதாகவும், B என்ற பண்பு $B_1, B_2 \ldots B_s$ என்ற 'S' துணைப் பண்புகளையுடையதாகவும் இருக்கலாம். A, B என்ற இவ்விரு பண்புகளையும், பல பகுதிகளாகப் பிரித்து, அவற்றோடு இணைந்த துணைப் பண்புகளோடு அமைக்கப்படும் பட்டியலுக்கு இணைப் பட்டியல் (Contingency table) எனப் பெயராகும். இத்தகைய பட்டியலின் அமைப்பு அடியிற் கண்டவாறு இருக்கும்.

		பண்பு A					மொத்தம்
		A_1	A_2	A_3	...	A_K	
பண்பு B	B_1	$(A_1 B_1)$	$(A_2 B_1)$	$(A_3 B_1)$	...	$(A_K B_1)$	(B_1)
	B_2	$(A_1 B_2)$	$(A_2 B_2)$	$(A_3 B_2)$	...	$(A_K B_2)$	(B_2)
	B_3	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...
	B_s	$(A_1 B_s)$	$(A_2 B_s)$	$(A_3 B_s)$	...	$(A_K B_s)$	(B_s)
மொத்தம்		(A_1)	(A_2)	(A_3)	...	(A_K)	N

ஒரு பண்பை 'K' பகுதிகளாகவும் மற்றொரு பண்பை 'S' பகுதிகளாகவும் பிரித்து மேற்கண்டவாறு அமைக்கும் பட்டியலை

($K \times S$) இணைப் பட்டியல் என்கிறோம். இரு பண்புகளும் இரு பகுதிகளாகப் பிரித்து அமைக்கப்படும் பட்டியலை 2×2 இணைப் பட்டியல் அல்லது நான்கு மடிப்புப் பட்டியல் (Four-fold table) என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, X, Y என்ற இரு பண்புகளும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு அமைக்கும் கீழே தரப்பட்ட 2×2 இணைப்பட்டியலைக் கவனிப்போம்.

		பண்பு X		மொத்தம்
		α_1	α_2	
பண்பு Y	β_1	A	B	$A+B$
	β_2	C	D	$C+D$
மொத்தம்		$A+C$	$B+D$	$N=A+B+C+D$

இதில் α_1, என்பது X பண்பு பெற்ற தன்மை; α_2 என்பது X பண்பைப் பெற்றிராத தன்மை. β_1 என்பது Y பண்பு பெற்ற தன்மை; β_2 என்பது Y பண்பு இல்லாத தன்மை. A என்பது X, Y பண்புகளைப் பெற்ற நபர்களின் எண்ணிக்கை; B என்பது X பண்பைப் பெற்றிராத, Y பண்பைப் பெற்ற நபர்களின் எண்ணிக்கை; C என்பது X பண்பைப் பெற்ற, Y பண்பைப் பெற்றிராத நபர்களின் எண்ணிக்கை; D என்பது X, Y இரு பண்புகளையும் பெற்றிராத நபர்களின் எண்ணிக்கை. A, B, C, D ஆகியவற்றை அறை அலைவெண்கள் என்கிறோம். பொதுவாக, உளவியலில் சோதனைகளுக்கான வினக்களுக்கும், உத்திக் கணக்குகளுக்கும் பதில்கள், ஆம்-இல்லை, வெற்றி-தோல்வி, உயர்ந்த-தாழ்ந்த, அடைந்தவர்-அடையாதவர், மேல்-கீழ் என்பன போன்றவாறு அமைவதால், α_1, β_1 என்பன வெற்றி-வெற்றி, ஆம்-ஆம் போன்றவற்றையும், α_1, β_1 என்பன வெற்றி - தோல்வி, ஆம்-இல்லை போன்றவற்றையும் α_2, β_1 என்பன தோல்வி-வெற்றி, இல்லை-ஆம் போன்றவற்றையும், α_2, β_2 என்பன தோல்வி-தோல்வி, இல்லை-இல்லை போன்றவற்றையும் குறிக்கின்றன.

இப் பட்டியலில் குறிப்புகள் (அறை அலைவெண்கள்) அமைந்த தன்மையினைக் கொண்டு X-க்கும் Y-க்கும் உள்ள உறவினை ஓரளவுக்குக் கூற முடியும். A அறையிலும் D அறையிலும் அலைவெண்கள் (குறிப்புகள்) அதிக எண்ணிக்கையில் இருந்தால் அது X, Y-க்குமுள்ள நெருங்கிய நேர்மறை உறவினையும், C அறையிலும் B அறையிலும் விவரங்கள் (அலைவெண்கள்) அதிக எண்ணிக்கையில் இருந்தால் அது எதிர்மறை உறவினையும், நான்கு அறைகளிலும் விவரங்கள் ஓரளவிற்குக் சமமாகப் பரவியிருந்தால் அது, X, Y-க்கு இடையேயுள்ள உறவின்மையும் காட்டுகின்றன.

2×2 இணைப் பட்டியலில டெட்ராகோரிக் r_t கணக்கிடும் முறை

இரு பண்புகளும் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தால், அவற்றை இரு பகுதிகளாகப் (ஒவ்வொரு பண்பும்) பிரித்து, 2×2 இணைப்பட்டியலாக மாற்றி அமைத்து, அதற்கு டெட்ராகோரிக் r_tஐக் கணக்கிடுவதே சிறந்ததாகும். (2×2) பட்டியலில் $(A+B)$-ம் $(C+D)$-ம் சமமாகவும், $(A+C)$-ம் $(B+D)$-ம் கிட்டத்தட்ட சமமாகவும் இருக்கும்போது, அடியிற் கண்ட சூத்திரத்தை (டெட்ராகோரிக்), பண்புகளின் தொடர்பை அளக்கப் பயன்படுத்தலாம்.

$$r_t = \text{Cos}\left(\frac{180^\circ \times \sqrt{BC}}{\sqrt{AD}+\sqrt{BC}}\right)$$

இங்கு A, B, C, D என்பன (2×2) இணைப்பட்டியலில் (மேலே கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில்) அறை அலைவெண்களாகும். கொசைன் (Cosine) பட்டியலிலிருந்து[1] r_t-ன் மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$(A\times D)>(B\times C)$ யெனில், r_t-ன் மதிப்புக்கு + குறியிடவேண்டும். அதாவது r_t மிகையெண்ணாகும் (positive number).

$BC>AD$ யெனில், r_t-ன் மதிப்புக்கு — குறியிடவேண்டும். அதாவது r_t குறையெண்ணாகும்.

$AD = BC$ எனில், $r_t = \text{Cos}\ 90^\circ = 0$ ஆகும்.

1. H. E. Garret, Statistics in Psychology and Education, Vakils, Feffer and Simons Pvt. Ltd. Table J. Page 459.

$BC > AD$ யெனில் சூத்திரத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுத வேண்டும்.

$$r_t = \text{Cos}\left(\frac{180^\circ \times \sqrt{AD}}{\sqrt{BC}+\sqrt{AD}}\right)$$

பியர்ஸன் உடன் தொடர்புக் கெழு, r-க்குக் கொடுக்கும் விளக்கத்தைப் போன்று r_t-ன் மதிப்புக்கும் விளக்கம் கூற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழே தரப்பட்ட பட்டியலுக்கு டெட்ராகோரிக் உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணக்கிடவும்.

		தொழில் அளவீடு	
		சராசரிக்கு மேல்	சராசரிக்குக் கீழ்
சோதனை	இடைநிலைக்கு மேல்	40	76
	இடைநிலைக்குக் கீழ்	62	55

இங்கு

$$A = 40$$

$$B = 76$$

$$C = 62$$

$$D = 55$$

$BC > AD$-யாக இருப்பதால், அதாவது $(76 \times 62) > (40 \times 55)$ ஆக இருப்பதால்,

$$r_t = \text{Cos}\left(\frac{180^\circ \times \sqrt{AD}}{\sqrt{BC}+\sqrt{AD}}\right)$$

$$= \text{Cos}\left(\frac{180° \times \sqrt{40 \times 55}}{\sqrt{76 \times 62} + \sqrt{40 \times 55}}\right)$$

$$= \text{Cos } 73{\cdot}08°$$

கொசைன் பட்டியலில்

Cos 73·08° = ·291 ஆகும்.

எனவே,

$\underline{r_t = 291.}$

3. பை கெழு—ϕ (The phi Coefficient—ϕ)

கொடுக்கப்பட்ட இரு மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் இரு பகுதிகளாக மட்டுமே பிரிக்க முடிகின்றபோது அம் மாறிகள் தனித்த மாறிகளாக (Discrete variables) அமைகின்றன. எனவே, அம் மாறிகள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமையாது. ஆகவே, அத்தகைய இரு மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினை அளக்க பைக் கெழு ஒரு தகுந்த அளவையாக அமைகிறது. சோதனை உருப்படிகளை (வினுக்கள் அல்லது உத்திக் கணக்குகள்) பெரும்பாலும், ஆம் அல்லது இல்லை, வெற்றி அல்லது தோல்வி, உண்மை அல்லது பொய் போன்ற பதில்கள் பெறுவதற்கேற்பவாறு அமைப்பதால், உளவியலில் மாறிகளிடையேயுள்ள உறவினை அறிய பை கெழு அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கண்டறிந்த விவரங்களை ஓர் 2×2 இணைப்பட்டியலில் (அடியிற் கண்டவாறு) அமைத்து ϕஐக் கணக்கிடலாம்.

		சோதனை உருப்படி I		மொத்தம்
		வெற்றி	தோல்வி	
சோதனை உருப்படி II	வெற்றி	A	B	$A+B$
	தோல்வி	C	D	$C+D$
	மொத்தம்	$A+C$	$B+D$	$N=A+B+G+D$

சூத்திரம் (ϕஐக் கணிக்க)

$$\phi = \frac{AD-BC}{\sqrt{(A+B)\,(C+D)\,(A+C)\,(B+D)}}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

• 100 உருப்படிகளைக் (வினாக்கள் அல்லது கணக்குகள்) கொண்ட ஒரு சோதனையில் X, Y என்பவை இரு உருப்படிகளாகும். 225 பேர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில் X உருப்படியில் வெற்றி கண்டவர்கள் 100 பேர்கள்; தோல்வியடைந்தவர்கள் 125 பேர்கள். அதே குழுவில் Y உருப்படியில் வெற்றியடைந்தவர்கள் 135 பேர்கள்; தோல்வியடைந்தவர்கள் 90 பேர்கள். X, Y இரண்டிலும் வெற்றி கண்டவர்கள் 80 பேர்கள். எனில் X, Y ஆகியவற்றுக்கிடையேயுள்ள உறவினை ஆய்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு அடியிற்கண்ட பட்டியல் அமைப்போம்.

		வரும்படி X		
		வெற்றி	தோல்வி	மொத்தம்
உருப்படி Y	வெற்றி	80	55	185
	தோல்வி	20	70	90
	மொத்தம்	100	125	225

இதில் $A = 80$

$B = 55$

$C = 20$

$D = 70$

$$\therefore \quad \phi = \frac{AD-BC}{\sqrt{(A+B)\,(C+D)\,(A+C)\,(B+D)}}$$

$$= \frac{(80\times70)-(55\times20)}{\sqrt{135\times90\times125\times100}}$$

$$= \cdot36$$

X, Y ஆகியவற்றுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க உறவு உள்ளன.

ϕ-ன் மதிப்புக்கு விளக்கம் காண, ϕ ஐ χ^2-க்குத் தொடர்பு படுத்தலாம்.

$$\phi^2 = \frac{\chi^2}{N}$$

அல்லது $\chi^2 = N \cdot \phi^2$

இங்கு N என்பது மொத்த விவரங்கள்

எனவே, கணக்கிடப்பட்ட χ^2ஐ, பட்டியல் χ^2-வுடன் ஒப்பிட்டு ϕ-ன் சிறப்பை (Significance) அறியலாம்.

மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கில் $\phi = \cdot36$ எனக் கண்டோம்.

$$\therefore \quad \chi^2 = 225 \times (.36)^2$$

$$= 29.2.$$

வரையற்ற பாகை $= (2-1)(2-1) = 1 \times 1 = 1$

5% சிறப்பு வரம்பில் 1 வரையற்ற பாகைக்கான

χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு $= 3.84$

எனவே, X-க்கும் Y-க்கும் தொடர்பில்லையென்ற சூனிய எடுகோளைத் தள்ளுபடி செய்து, அவற்றுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க தொடர்புண்டு என முடிவு கூறுவோம்.

4. இணைப்புக் கெழு — C (Coefficient of contingency-C)

முந்தைய பக்கங்களில், இரு பண்புகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினை, (இரு பண்புகளும் இரு பகுதிகளாக மட்டுமே பிரித்து அமைத்த 2 × 2 பட்டியலில்) காணும் முறைகளைக் கண்டோம்.

ஆனால், இரண்டு பண்புகள், ஒவ்வொன்றையும் இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட பகுதிகளாகப் பிரித்து இணைப் பட்டியல் அமைத்து அவ்விரண்டு பண்புகளுக்கிடையேயுள்ள உறவினைக் காண இணைப்புக் கெழுவைப் பயன்படுத்தலாம்.

ஓர் இணைப் பட்டியலில் $O_1, O_2, O_3 \ldots O_n$ என்பன அறை அலைவெண்கள் (அதாவது கண்டறிந்த அறை அலைவெண்கள்) என்க. அவற்றின் முறையே எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை $E_1, E_2 \ldots E_n$ என்க. எனில், S என்பது,

$$S = \sum \frac{O_j^2}{E_j} \text{ ஆகும்}$$

அதாது, ஒவ்வோர் அறையிலும் கண்டறிந்த அலை வெண்ணை வர்க்கமாக்கிய பின்னர் அதனை எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணால் வகுக்க வேண்டும். இதுபோல எல்லா அறை களிலும் செய்யவேண்டும். பின்னர் முன் கூறியவாறு செய்து கண்டறியும் மதிப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும். இப்போது,

$$C = \sqrt{\frac{S - N}{S}} \text{ என்பதே இணை கெழுவாகும்.}$$

இரு பண்புகளுக்கும் தொடர்பில்லை என்ற சூனிய எடு கோளின் அடிப்படையில் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் காண வேண்டும்.

ஓர் இணைப் பட்டியலில் C (இணைப்புக் கெழு)–லிருந்து χ^2-ன் மதிப்பைப் பெறலாம். சூத்திரம்

$$C = \sqrt{\frac{\chi_2}{N + \chi^2}}$$

இங்கு,

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

$$= \left(\sum \frac{O_j^2}{E_j}\right) - N$$

C–ன் சிறப்பை χ^2ஐக் கொண்டு கூறலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட இரு பண்புகளுக்கிடையே தொடர்பில்லை யெனில், C-ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். C-ன் மதிப்பு பூச்சிய மாகவோ அல்லது அதற்கும் பெரிதாகவோ (1-க்குக் கீழ்)தான் இருக்கும். அதாவது, 0-ம், + 1-ம் இதன் எல்லைகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு :

கீழ்க்கண்ட பட்டியலிருந்து, பெற்ளேர்களின் உயரத்திற் கும் அவர்களின் குழந்தைகளின் உயரத்திற்கும் உள்ள உறவினை ஆய்க.

		பெற்ளேர்கள்			
		உயரமான	நடுத்தரமான	குட்டையான	மிகவும் குட்டையான
குழந்தைகள்	உயரமான	20	30	20	2
	நடுத்தரமான	14	125	85	12
	குட்டையான	3	140	165	125
	மிகவும் குட்டையான	3	37	68	151
	மொத்தம்	40	332	338	290

பெற்ளேரின் உயரத்திற்கும் அவர்களின் குழந்தைகளின் உயரத்திற்கும் தொடர்பில்லை என்ற சூனிய எடுகோளின் அடிப் படையில் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுவோம்.

எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் :

கண்டறிந்த அலைவெண் 20-க்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= \frac{72 \times 40}{1000} = 2 \cdot 9$

கண்டறிந்த அலைவெண் 30-க்கான எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $= \frac{72 \times 332}{1000} = 23 \cdot 9$

இதுபோலவெ மற்ற எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களையும் கணக்கிட வேண்டும். அடியிற் கண்ட பட்டியலில் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் அந்தந்த அறைகளில் அடைப்புகளுள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

		பெற்றோர்கள்				
		உயரமான	நடுத்தரமான	குட்டையான	மிக குட்டையான	மொத்தம்
குழந்தைகள்	உயரமான	20 (2.9)	30 (23.9)	20 (24.3)	2 (20.9)	72
	நடுத்தரமான	14 (9.4)	125 (78.4)	85 (79.8)	12 (68.4)	236
	குட்டையான	3 (17.3)	140 (143.8)	165 (146.4)	125 (125.5)	433
	மிக குட்டையான	3 (10.4)	37 (85.9)	68 (87.5)	151 (75.2)	259
	மொத்தம்	40	332	338	290	1000

$$C = \sqrt{\frac{S - N}{S}}$$

இங்கு,

$$S = \sum \frac{O_j^2}{E_j}$$

$$N = 1000$$

$$S = \frac{(20)}{2.9} + \frac{(30)^2}{23.9} + \frac{(20)^2}{24.3} + \dots + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(151)^2}{75.2}$$

$$S = 1314.6$$

$$\therefore \quad C = \sqrt{\frac{1314.6 - 1000}{1314.6}}$$

$$= \sqrt{.2317}$$

$$= .48$$

∴ பெற்றோர்களின் உயரத்திற்கும், அவர்களின் குழந்தைகளின் உயரத்திற்கும் சிறப்பான தொடர்புண்டு.

$$\sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} = C$$

அதாவது,

$$.48 = \sqrt{\frac{\chi^2}{1000 + \chi^2}}$$

$$\therefore \quad \chi^2 = 319.73.$$

வரையற்ற பாகைகள் = (4 — 1) (4 — 1) = 3 × 3 = 9

5% சிறப்பு வரம்பில், 9 வரையற்ற பாகைகளுக்கு χ^2 பட்டியலின் மதிப்பு = 16.92

கண்டறிந்த χ^2 மதிப்பு (= 319.73) χ^2 பட்டியலின் மதிப்பை விட மிகப் பெரிதாக இருப்பதால், சூனிய எடுகோளை 5% சிறப்பு வரம்பில் தள்ளுபடி செய்கிறோம். பெற்றோர்களின் உயரத்திற்கும், அவர்களின் குழந்தைகளின் உயரத்திற்குமுள்ள உறவு மிகச் சிறப்பானது.

பயிற்சி 15

(1) இரு நீதிபதிகள் 10 மாணவர்களுக்கு ஒரு போட்டியில் அளித்த மதிப்பெண்கள் வருமாறு :

X :	4	4	7	7	7	9	16	17	21	25
Y :	8	16	8	8	8	16	20	12	25	20

இரு நீதிபதிகளும் பொதுவான கண்ணோட்டமுடையவர்களா என்பதை ஆய்க.

(2) 15 மாணவர்கள் *A*, *B* ஆகிய இரண்டு சோதனைகளில் பெற்ற மதிப்புகள் வருமாறு :

அவற்றின் தர உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

மாணவர்கள்	சோதனை *A*	சோதனை *B*
1	180	110
2	203	98
3	188	118
4	193	104
5	176	112
6	174	124
7	158	119
8	197	95
9	176	94
10	138	97
11	126	110
12	160	94
13	151	126
14	186	119
15	186	117

(3) (a) கீழே தரப்பட்ட பட்டியலுக்கு டெட்ரோகோரிக் உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

		மகன்கள்	
		ஆரோக்கியமான	ஆரோக்கியமற்ற
தந்தையர்கள்	மது அருந்துபவர்கள்	150	102
	மது அருந்தாதவர்கள்	405	305

(b)

		வினா 1	
		இல்லை	ஆம்
வினா II	ஆம்	85	180
	இல்லை	112	98

(4) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்கு இணக்கெழுவினைக் (Cஐ) கணக்கிடுக.

		கணவன்மார்கள்	
		நல்ல தன்மையினர்	நல்ல தன்மையற்றவர்
கணவன்மார்களின் கல்வி	கல்லூரிப் படிப்பு	1230	530
	பள்ளிப் படிப்பு	850	620
	படிப்பில்லாதவர்	550	400

(5) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குப் பண்புறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

		சகோதரர்கள்	
		நல்ல தன்மையினர்	நல்ல தன்மையற்றவர்
சகோதரிகள்	நல்ல தன்மையினர்	1230	530
	நல்லதன்மை யற்றவர்	860	980

(6) புள்ளியியலில், பயன்படுத்துகின்ற 'உடன்தொடர்புக்கும்' (Correlation), 'உறவுக்கும்' (Association) இடையேயுள்ள வேறுபாடு யாது?

16. நம்பகமும், ஏற்புடைமையும், உருப்படி ஆய்வும்

(Reliability, Validity and Item Analysis)

கண்டறிந்த விவரங்கள் பிற்பாடு செய்யப்படும் ஆய்வு முறைகளுக்கு அடிப்படையானவை; எனவே, அவற்றை நன்கு சோதித்து ஆராய்ந்து ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டியது மிக அவசியமாகும். பரிசோதனைகளில் கண்டறியும் அளவுகளில் பொதுவாகப் பிழைகள் இருக்கும். ஒன்றின் உண்மையான மதிப்பிற்கும், அதனை அளந்து கண்டறியும் மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசமே பிழையாகும். X_i என்பதை அளந்து கண்டறிந்த மதிப்பாகவும், T_i என்பதை உண்மையான மதிப்பாகவும் கொண்டால், பிழையைக் (e_iஐ) கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\pm e_i = X_i - T_i$$

ஒரு குழந்தையின் நுண்ணறிவையோ, அல்லது ஒருவரின் உயரத்தையோ அளந்து கண்டறிந்த மதிப்பு பிழையுடையதாக இருக்கலாம். இப் பிழைகளை, முறையுடைய அல்லது நிலையான பிழைகள் (Systematic or Constant Errors), வாய்ப்புப் பிழைகள் (Chance Errors) என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

உண்மை மதிப்பை முறையாக மிகை மதிப்பிடும் அல்லது குறை மதிப்பிடும் விவரங்கள் முறையுடைய பிழைகளுக்குட்பட்டவைகளாகும். முறையுடைய பிழைகளை வாய்ப்புப் பிழைகளைவிட எளிதில் தவிர்க்கலாம். முறையுடைய பிழை எல்லா மதிப்புகளையும் ஒரே அளவில் உயர்த்தும் அல்லது தாழ்த்தும். ஆனால், இது நம்பகக் கெழுவைப் பாதிக்காது. வாய்ப்புப் பிழை சில மதிப்புகளை மட்டும் உயர்த்தவோ அல்லது தாழ்த்தவோ

செய்யும். ஆகவே, இது நம்பகக் கெழுவைப் பாதிக்கும். உண்மையான மதிப்பை வரையறுத்துக் கூறமுடியாததால், இதனை நடைமுறையில் கணக்கிட இயலாது. ஒரு பண்பினை ஒரு முறை அளந்து கண்டறியும் மதிப்பு, அதனை அதே அளவுக் கருவியால் உண்மை மதிப்பு மாறாத நிலையில், பல முறை அளந்து கண்டறியும் அளவு இன்னும் திருத்தமாக இருக்கும். ஒரு பண்பினை எண்ணிலி (Infinity) தடவைகள் ஒரே அளவுக் கருவியால், உண்மையான மதிப்பு மாறாத நிலையில், அளந்து கண்டறியும் அளவுகளின் சராசரி, அப்பண்பின் உண்மையான அளவாகக் கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, உண்மையான மதிப்பை அடியிற்கண்டவாறு எழுதலாம்,

$$T_i = \lim_{K \to \infty} \frac{\Sigma X_i}{K}$$

உண்மையான மதிப்பை மேற்கூறியவாறு வரையறுப்பது இயற்பியல் பொருள்களின் அளவுகளுக்குப் பொருத்தமாகலாம். எடுத்துக்காட்டாக, நிலையான நிலைமையில் ஓர் அளவு கோலால் உயரத்தை ஒரு முறை அளந்து கண்டறியும் மதிப்பைப் காட்டிலும், பல முறை உயரத்தை அளந்து கண்டறியும் மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்பு இன்னும் திருத்தமாக இருக்கும்; எனவே, எண்ணிலி தடவைகள் அளந்து கண்டறியும் மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்பே உண்மையான மதிப்பாகக் (அதாவது உண்மையான உயரமாக) கொள்ளப்படுகிறது.

- உளவியல் சோதனைகளில் உண்மையான அளவு மேற்கூறியவாறு பெறுவது சிக்கலான பிரச்சினையாகும். மானிட நடத்தையின் அளவுகளை, பல தடவைகள் திரும்பப் திரும்பச் சோதனைகளை நடத்திக் கண்டறிவது சாதாரணமாக, சாத்தியமானதாக இருக்காது. அளக்கப்படுகின்ற பண்பு காலத்துடன் மாறுபடுவதால் கண்டறியும் அளவுகளிடையே பெரும் அளவில் வேறுபாடு காணப்படும். ஒரு குழந்தையின் நுண்ணறிவை அறியப் பல தடவைகள் ஒரே நுண்ணறிவுச் சோதனையை நடத்துவதில் பல சிரமங்கள் இருந்தாலும், சோதனைகள் நடத்தப்படுகின்ற காலத்தில் குழந்தையின் அறிவு வளர்ச்சி, மனப்போக்கு மாறுபடுவதால் அச் சோதனைகளிலிருந்து காணும் முடிவுகள் தவறானதாகவும், ஏற்கத் தகுதியற்றவைகளாகவும் இருக்கலாம். எனினும், சோதனைகளைத் தகுந்த முறையில் அமைத்துச் சோதனைக் கொடுக்கப்படுகின்ற செய்முறைக் குழுவின் தன்மையைக் கருத்தில் கொண்டு மேற்கூறிய வகையில் உண்மை மதிப்பு குறைந்த பிழையில் மதிப்பிடப்படுகிறது.

(1) நம்பகம் (Reliability)

ஒரு சோதனை மதிப்பு நிலையானதாகவும், உறுதியானதாகவும் இருக்கின்ற தன்மையை ஒப்புக்கொள்ள நமக்குத் தகுந்த காரணங்கள் இருப்பின், அந்த மதிப்பை நம்பகமானதாகச் சொல்லலாம். சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் நம்பகமான விவரங்கள் என்ற அடிப்படையில் பல புள்ளி விவர ஆய்வுகள் செய்யப்பட்டு முடிவுகள் கொடுக்கப்படுகின்ற படியால், கண்டறிந்த விவரங்கள் நிலையானதாகவும் உறுதியானவைகளாகவும் இருக்கவேண்டியது மிக அவசியமாகும். கண்டறிந்த விவரங்கள் நம்பகமானதாக இருக்கவேண்டுமென்று கூறும்போது, ஒரு பொருளிலிருந்தோ அல்லது ஒருவரிடமிருந்தோ பெறும் அளவுகள் நம்பகமானதாக இருக்கவேண்டுமென்பதாக இருந்தாலும் அளக்கும் கருவியும், அளக்கப்படுகின்ற முழுமைத் தொகுதியும் நம்பகமாக இருக்க வேண்டும். ஒரு பள்ளிச் சிறுவனின் நுண்ணறிவு ஈவு கொடுக்கப்பட்டால் அது அந்தச் சிறுவனின் உண்மையான திறமையை (எந்த நோக்கத்திற்காகக் கணிக்கப்பட்டதோ) எடுத்துக்காட்டுவதாக இருக்க வேண்டும். குறிப்பாக உளவியல், கல்வியியல், சமூகவியல் விவரங்கள் நம்பகமானதாக இருக்கவேண்டுமெனில் அளக்கும் கருவியும் (சோதனைகள்), அளக்கப்படுகின்ற செய்முறைக் குழுவும் நம்பகமாக இருக்கவேண்டியது மிக அவசியமாகும்.

நம்பகக் கெழு (Reliability Coefficient)

ஒரு மாதிரியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பினரையும் இரண்டு வெவ்வேறு சமயங்களில் அளக்கும் ஒரு சூழ்நிலையைக் கவனிப்போம். ஒவ்வோர் உறுப்பினரிடமிருந்தும் இரண்டு (சோடி விவரங்கள்) கிடைக்கின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கின்ற விவரங்கள் ஒரே பண்பின் அளவுகளெனவும், அவை பிழைகளுக்குட்பட்ட அளவுகளெனவும் கொள்வோம். இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$X_{i_1} = T_i + e_{i1}$$
$$X_{i_2} = T_i + e_{i2}$$

இங்கு

X_{i1} = 'i' என்ற உறுப்பினரிடமிருந்து முதல் தடவையாகக் கண்டறிந்த மதிப்பு.

X_{i_2} = 'i' என்ற உறுப்பினரிடமிருந்து இரண்டாவதாகக் கண்டறிந்த மதிப்பு.

T_i = 'i' என்ற உறுப்பினரின் உண்மையான மதிப்பு.

e_{i_1}, e_{i_2} = ராண்டம் பிழைகள்

சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் கண்டால்

$$(X_{i1}-\mu) = (T_i-\mu)+e_{i1}$$

$$(X_{i_2}-\mu) = (T_i-\mu)+e_{2i}$$

இங்கு

μ = முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி.

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளையும் பெருக்கினால் நமக்குக் கிடைப்பது :

$$(X_{i_1}-\mu)\ (X_{i2}-\mu) = [(T_i-\mu)+e_i]\ [(T_i-\mu)+e_{i2})]$$

$$= (T_i-\mu)^2+(T_i-\mu)e_{i_2}+(T_i-\mu)e_{i_1}+e_{i_1}+e_{i2}$$

இதேபோல், முழுமைத் தொகுதியில் அடங்கும் N உறுப்பினர்களுக்கும், கணக்கிட்டு அவற்றைக் கூட்டி, அக் கூட்டுத் தொகைகளை $N\sigma_1\sigma_2$ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{\Sigma\ (X_i-\mu)\ (X_{i_2}-\mu)}{N\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \frac{\Sigma(T_i-\mu)^2+\Sigma(T_i-\mu)e_{i_2}+\Sigma(T_i-\mu)e_{i1}+\Sigma e_{i_1}e_{i_2}}{N\sigma_1\sigma_2}$$

கிடைக்கும். இங்கே

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma\ (X_{i_1}-\mu)^2}{N}\ ;\quad \sigma_2 = \frac{\Sigma\ (X_{i2}-\mu)^2}{N}$$

ராண்டம் பிழைகளுக்கிடையே தொடர்பில்லையெனவும், உண்மையான மதிப்புகளுக்கும், ராண்டம் பிழைகளுக்கும் இடையே எத்தகைய தொடர்பும் இல்லை எனவும் புனைந்து கொண்டால்,

$$\sum e_{i1}\ e_{i2} = 0$$

$$\sum (T_i-\mu)\ e_{i1} = 0$$

$$\sum (T_i - \mu)\, e_{i_2} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$\frac{\sum (X_{i_1} - \mu)\,(X_{i2} - \mu)}{N\,\sigma_1\,\sigma_2} = \frac{\sum (T_i - \mu)^2}{N\,\sigma_1\,\sigma_2} \text{ ஆகும்}$$

இப்போது,

$$\rho_{xx} = \frac{\sum (X_{i_1} - \mu)\,(X_{i2} - \mu)}{N\,\sigma_1\,\sigma_2} \text{ என எழுதினால்,}$$

$$\rho_{xx} = \frac{\sum T_i - \mu)^2}{N\,\sigma_1\,\sigma_2} \text{ என ஆகும்.}$$

கண்டறிந்த சோடி விவரங்கள் ஒரே பண்பின் அளவுகள் ஆதலால், $\sigma_1 = \sigma_2$ ஆகும்.

மேலும்,

$\frac{\sum (T_i - \mu)^2}{N}\ \sigma_T^2$ எனவும், $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x$ எனவும் எழுதினால்,

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_\chi^2} \text{ என எழுதலாம்.}$$

இங்கு,

ρ_{xx} = நம்பகக் கெழு

σ_T^2 = உண்மையான மதிப்புகளின் மாறுபாடு

σ_χ^2 = கண்டறிந்த மதிப்புகளின் மாறுபாடு.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sigma_T^2 = 90$, $\sigma_\chi^2 = 150$ எனில் நம்பக்கெழு,

$$\rho_{xx} = \frac{90}{150} = .6$$

அதாவது, கண்டறிந்த அளவுகளில் காணப்படுகின்ற மாறுபாட்டில் 60 சதவீதம் உண்மையான மதிப்பிலுள்ள மாறுபாட்டினுல் ஏற்பட்டதாகவும், மீதி 40 சதவீதம் பிழையிலுள்ள மாறுபாட்டினுல் ஏற்பட்டதாகவும் எடுத்துக் கொள்ளப் படுகிறது.

மாதிரி மதிப்பீடுகளைப் பயன்படுத்தினுல் நம்பக் கெழுவை அடியிற் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$r_{xx} = \frac{S^2_T}{S^2 X}$$

நம்பகத்தைத் தீர்மானிக்கும் முறைகள்

உண்மையான மதிப்பை வரையறுத்துக் கூற இயலாததால், மேற்கூறிய முறையில் நம்பகக் கெழுவைக் கணக்கிட முடியாது. எனவே, நம்பகக் கெழுவைக் கணக்கிட நடைமுறையில் பல வேறுபட்ட முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவை :

(1) சோதனை — மறு சோதனை முறை (Test-retest Method)

(2) இணைத் தாள்கள் முறை (Parallel forms Method)

(3) பாதியாக — பிரிக்கும் முறை (Split - half Method)

(4) இடை இசைவு முறை (Internal consistency Method)

(1) சோதனை-மறுசோதனை முறை

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியிலுள்ள உறுப்பினர்களை அளந்து பெறும் மதிப்புகளுக்கும், அதே உறுப்பினர்களை வேறொரு சமயம் அதே அளக்கும் கருவியால் அளந்து கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் கணக்கிடுவதே இம் முறையாகும். உளவியலில் அளக்கும் கருவி உளவியல் சோதனையாக இருந்தால், ஒரு குழுவின் ஒவ்வோர் உறுப்பினருக்கும் ஒரு சோதனை இரு முறைகள் நடத்தப்படுகின்றன. முதலில் சோதனையை நடத்திக் கண்ட சோதனை மதிப்புகளுக்கும் (Test scores), அந்தக் குழுவிற்கு அதே சோதனையை மறுமுறையும் நடத்திப் பெறும் சோதனை மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணிக்க வேண்டும். இவ்வாறு பெறும் உடன் தொடர்புக் கெழுவினை 'நம்பகக் கெழு' என்கிறோம்.

ஒரு சோதனையைத் திரும்ப திரும்ப நடத்தினால் சோதனையிலிருந்து பெறும் மதிப்புகளில் பிழைகள் குறைந்து இருக்கும் என்பது பொதுவான கருத்தாகும். அளவுகளின் நம்பகத்தை அறிய சோதனை — மறு சோதனை முறை சில சமயங்களில் சிறந்ததாக இருப்பினும், இம் முறைக்கு எதிர்ப்புகளும் உள்ளன. ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையை ஒரு முறை நடத்திய பிறகு அதே சோதனையை மீண்டும் அந்தக் குழுவிற்கு உடனே நடத்தினால், முதலில் ஏற்றுக் கொண்ட சோதனையில் விடை தெரியாத அல்லது விடையளிக்க நேரம் போதாத வினாக்களுக்கு, மறுமுறை அச் சோதனையை ஏற்றுக் கொள்ளும் போது (விடை தெரிந்த வினாக்களுக்கு முதலில் உடனே விடையளித்து விட்டு) யோசித்துச் சரியான வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வாய்ப்புண்டு. எனவே, ஒரு சோதனையை முதல் தடவையாக ஏற்றுக் கொண்டு பெறும் மதிப்புகளை விட இரண்டாவது தடவையாக அச் சோதனையை ஏற்றுக் கொண்டு அதிக மதிப்புகள் பெறலாம். மேலும், சோதனைக்கும் மறு சோதனைக்கும் இடையேயுள்ள காலம் அதிகமாக இருந்தாலும் (6 மாதங்கள் அல்லது அதற்கு மேல்) நம்பகக் கெழுவை அது பாதிக்கும். குறிப்பாகக் குழந்தைகளுக்கு ஒரு சோதனையை இரு முறைகள் நடத்தினால், குழந்தைகளின் உடல், மன வளர்ச்சியின் காரணமாக முதலில் புரிந்து கொள்ள முடியாத அதாவது, விடை தெரியாத வினாக்களுக்கு மறுமுறை நல்ல முறையில் விடையளித்து, நல்ல மதிப்புகள் பெற வாய்ப்புண்டு. ஒரு சோதனையைக் கொடுத்த பின்பு மறுமுறையும் அந்தச் சோதனையை எப்பொழுது கொடுக்கப்பட வேண்டும் என்பதை நினைவு, வயது ஆகியவற்றைப் போன்ற இயக்கும் தன்மை வாய்ந்தவற்றைக் கருத்தில் கொண்டு சரியாகத் தீர்மானித்தால், விவரங்களின் நம்பகத்தை அறிய இந்த முறை ஒரு சிறந்த முறையாகும்.

(2) இணைத்தாள்கள் முறை

ஒரு சோதனைக்காக இரண்டு (அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட இணைத் (வினாத்) தாள்களை உருவாக்கிக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு குழுவிலுள்ள எல்லா உறுப்பினர்களுக்கும் இரண்டு வினாத் தாள்களையும் கொடுத்து, முதல் வினாத் தாளுக்கு கிடைக்கின்ற மதிப்பு (விடை)களுக்கும் இரண்டாவது வினாத்தாள்களுக்குக் கிடைக்கின்ற மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பைக் கணக்கிடுவதே முறையாகும். இவ்வாறு கணிக்கப்படும் உடன் தொடர்புக் கெழுவை நம்பகக் கெழு என்கிறோம். இரண்டு வினாத் தாள்களில் ஒன்றை முதலில் கொடுத்து விட்டு,

இரண்டிலிருந்து நான்கு வாரங்களுக்குப் பிறகு மற்றொன்றைக் கொடுத்தால் நல்லது.

இணைத் தாள்களை உருவாக்கும் போது ஒரு தாளுக்கும் மற்றொரு தாளுக்கும் இடையேயுள்ள உடன்தொடர்பைச் சோதனையின் தன் – உடன் தொடர்பின் (Self correlation) அளவையாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. இரண்டு வினாத் தாள்களும் ஒரே மாதிரியாகவோ அல்லது முற்றிலும் வேறுபட்டவைகளாகவோ அமையாதவாறு, வினாக்களின் கடினத்துவம், பொருளடக்கம் போன்றவை ஓரளவுக்குச் சமமாக இருக்கின்றவாறு சோதனைக்கான இணைத் தாள்களை உருவாக்க வேண்டும். இணைத் தாள்களின் கூட்டுச் சராசரிகள் ஏறக் குறைய சமமாக இருக்க வேண்டும்; திட்ட விலக்கங்களும் சமமாக இருக்க வேண்டும்; மேலும், இடை உடன் தொடர்புகளும் (Inter Correlations) சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(3) பாதியாகப் பிரிக்கும் முறை

ஒரு சோதனையைப் (ஒரு சோதனையில் அடங்கும் வினாக்களையோ அல்லது உத்திக் கணக்குகளையோ – Items) இரு பாதியாகப் பிரித்து, ஒரு பாதிச் சோதனையை ஒரு குழுவிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பினருக்கும் நடத்திப் பெறும் மதிப்புகளுக்கும், மறுபாதிச் சோதனையை அதே குழுவிற்கு நடத்திப் பெறும் மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பைக் காண வேண்டும். இவ்வாறு பெறும் உடன் தொடர்புக் கெழுவைப் 'பாதிச் சோதனை நம்பகக் கெழு' என்கிறோம். முழு சோதனை நம்பகக் கெழுவை,

$$r_{xx} = \frac{2\,r_{hh}}{1 + r_{hh}}$$ என்ற வாய்பாட்டினுல் கணிக்கலாம்.

இங்கு,

r_{xx} = முழுச் சோதனையின் நம்பகக் கெழு

r_{hh} = பாதிச் சோதனையின் நம்பகக் கெழு

இம்முறையை மேற்கொள்ளும் போது, பொதுவாக சோதனைக்கான உருப்படிகளை (items — வினாக்களையோ அல்லது உத்திக் கணக்குகளையோ) வரிசையாக 1, 2, 3, 4 ... என்ற எண்களையிட்டு 1, 3, 5 ... என்ற ஒற்றைப்படை எண்களைக் கொண்ட உருப்படிகள் ஒரு பாதிச் சோதனையிலும் 2, 4, 6 ... என்ற இரட்

டைப்படை எண்களைக் கொண்ட உருப்படிகள் மறுபாதிச் சோதனையிலும் அமைகின்றவாறு சோதனை உருவாக்கப்படுகிறது. சோதனையைப் பிரிக்கும் போது உருப்படிகளின் தரம் சமமாக இருக்கின்றவாறு (ஒரு பாதியில் சுலபமான உருப்படிகளும், மறு பாதியில் கடினமான உருப்படிகளும் அமையாதவாறு) பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு சோதனையைத் திரும்ப நடத்த முடியாத நிலையிலும், இணைத் தாள்களை உருவாக்க முடியாத சமயங்களிலும் இம் முறை பயன்படுத்தப்படுப்படுகிறது. செயற் சோதனைகளிலும், ஆளுமை, ஆர்வம், நோக்கம் சோதனைகளிலும் இந்த முறை பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இம் முறையினால் நம்பகக் கெழுவைக் கணக்கிடும்போது ஒரே சமயத்தில் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுவதால் மேற்கூறிய இரு முறைகளைக் காட்டிலும் இந்த முறை சிறந்த முறையாகக் கருதப்படுகிறது. ஆனால், இந்த இரு சம பாதி முறையில் சோதனைகளின் மதிப்புகள் வாய்ப்புப் பிழைகளினால் அதிகமாகப் பாதிக்கப்படுவதால், நம்பகக் கெழுவும் பாதிக்கப்படுகிறது.

(4) இடை இசைவு முறை

நம்பகக் கெழுவினைக் கணித்திட முன்பு கூறிய மூன்று முறைகளைப் பயன்படுத்த முடியாத நிலையில் இம் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆம் – இல்லை, வெற்றி – தோல்வி போன்ற விடைகளைப் பெறுவதற்கேற்றவாறு உருப்படிகளை அமைக்க வேண்டும். ஓர் உருப்படிக்கான சரியான விடைக்கு 1ஐயும், தவறான விடைக்கு 0ஐயும் கொடுத்துக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாட்டினால் நம்பகக் கெழுவைக் கணக்கிடுவதே இம் முறையாகும். இம் முறையைப் பயன்படுத்தும்போது சரியான விடை கொடுக்கப்பட்ட உருப்படிகளின் எண்ணிக்கையே சோதனை மதிப்பாகக் கொள்ளப்படுகிறது. நம்பகக்கெழு,

$$r_{xx} = \frac{n}{n-1} \quad \frac{S_x^2 - \sum_{i=1}^{n} P_i\, q_i}{S_x^2}$$

இங்கே,

r_{xx} — நம்பகக் கெழு

n = சோதனையிலுள்ள உருப்படிகளின் (வினாக்களின் அல்லது உத்திக் கணக்குகளின்) எண்ணிக்கை

S_x^2 = சோதனை மதிப்புகளின் மாறுபாடு

p_i = 'i' என்ற உருப்படியைச் சரியாகச் செய்த நபர்களின் விகிதச் சமம் (Proportion)

q_i = 'i' என்ற உருப்படியைச் சரியாகச் செய்யாது தோல்வியடைந்தவர்களின் விகிதச் சமம் ($P_i = 1 - q_i$)

சோதனை நீட்டிப்பின் விளைவு

• ஒரு சோதனையைத் திரும்பத் திரும்ப நடத்தி அல்லது சோதனைக்கான உருப்படிகளுடன் மேலும் உருப்படிகளைச் சேர்த்து அல்லது சோதனைக்காக உருவாக்கப்பட்ட வினாத்தாள்களின் எண்ணிக்கையை அதிகப்படுத்தித் திருத்தமான அளவுகள் பெறலாம். எனவே, சோதனை நீட்டிப்பின் விளைவாக அளவுகளின் நம்பகத்தை உயர்த்தலாம். சோதனையை நீட்டி அல்லது குறைத்துக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தினால் நம்பகக் கெழுவைப் பெறலாம்.

$$r_{KK} = \frac{K\, r_{xx}}{1 + (K - 1)\, r_{xx}}$$

இங்கு,

r_{KK} = கொடுக்கப்பட்ட சோதனையை மேலும் K தடவைகள் நடத்தி அல்லது சோதனையின் உருப்படிகளை K மடங்காக ஆக்கி அல்லது K இணை வினாத்தாள்களை உருவாக்கிப் பெறும் நம்பகக் கெழு.

r_{xx} = கொடுக்கப்பட்ட சோதனையின் நம்பகக் கெழு.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

ஒரு சூழ்நிலைச் சோதனையின் நம்பகக் கெழு .70. இந்தச் சோதனையை மேலும் 3 தடவைகள் நடத்தினால் நம்பகக் கெழு எந்த அளவிற்கு பாதிக்கும் என்பதைக் காண்க.

இங்கே,

$r_{xx} = .70;\quad K = 3$

$$\therefore\ r_{KK} = \frac{3 \times .70}{1 + (3 - 1)\,.70}$$

$$= \frac{2.1}{1 + 1.4}$$

$$= \frac{2.1}{2.4} = .87$$

சோதனை மூன்று மடங்காக்கினால் அல்லது மேலும் 3 தடவைகள் நடத்தினால் நம்பகக் கெழு .7–லிருந்து .87-க்கு உயரும்.

மேலே குறிப்பிட்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, குறிப்பிட்ட நம்பகக் கெழுவைப் பெறுவதற்காகச் சோதனையை எவ்வளவு தடவைகள் மேலும் நடத்த வேண்டும் அல்லது சோதனைக்கான உருப்படிகளை எத்தனை மடங்காக உயர்த்த வேண்டும் அல்லது இணைத் தாள்கள் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும் என்பதைக் கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கல்விச் சாதனைச் சோதனையின் நம்பகக் கெழு .70 எனில், .80 ஆக நம்பகக் கெழு இருக்கச் சோதனையை மேலும் எவ்வளவு தடவைகள் நடத்தபபட வேண்டும்? சூத்திரத்தின் படி,

$$r_{xx} = .70$$

$$r_{KK} = .80$$

K–ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

$$r_{KK} = \frac{K\, r_{xx}}{1 + (K-1)\, r_{xx}}$$

$$.80 = \frac{K \times .70}{1 + (K-1)\ .70}$$

$$.8 = \frac{.7\,K}{1 + 7\,K - .7}$$

$$= \frac{.7\,K}{.7\,K + .3}$$

$$.56\,K + .24 = .7\,K.$$

$$.14\,K = .24$$

$$K = \frac{.24}{.14} = 1.7 \simeq 2$$

.80 நம்பக் கெழுவைப் பெற, சோதனையை மேலும் 2 தடவைகள் நடத்த வேண்டும்.

உண்மை மதிப்பை மதிப்பீடு செய்தல்

உண்மையான மதிப்பைப் பரிசோதனையினால் காண இயலாது. ஆனால் தனித்த ஒன்றின் உண்மை மதிப்பை மதிப்பிட அடியிற்கண்ட சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$X\infty = r_{11} X_1 + (1 - r_{11})\overline{X_1}$

இங்கு,

$X\infty$ = ஒரு சோதனையில் உண்மையான மதிப்பின் (X_1-ன்) மதிப்பீடு.

X_1 = அந்தச் சோதனையில் கண்டறிந்த மதிப்பு.

$\overline{X_1}$ = அந்த சோதனையில் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி.

r_{11} = அந்தச் சோதனையின் நம்பகக் கெழு.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு:

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சோதனையின் நம்பகக் கெழு .7; கூட்டுச் சராசரி 70; திட்ட விலக்கம் 10. அந்த சோதனையில் X என்பவருடைய மதிப்பு 50 எனில், அவருடைய உண்மையான மதிப்பை மதிப்பிடுக.

உண்மை மதிப்பு,

$X\infty = r_{11} X_1 + (1 - r_{11})\overline{X_1}$

இங்கு,

$r_{11} = .7$

$X_1 = 50$

$\bar{X}_1 = 70$

$\therefore \quad X\infty = .7 \times 50 + (1 - .7)\, 70$

$= 35 + .3 \times 70$

$= 35 + 21 = 56$

எனவே,

அவருடைய உண்மையான மதிப்பு = 56 ஆகும்.

ஒரு சோதனையின் நம்பகக்கெழு எவ்வளவு பெரியதாக இருக்க வேண்டுமென்பது சோதனையின் வகையையும் (Nature), சோதனைக்காகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட குழுவின்

உருவு, அளவு (Size), மாறுபாடு (Variability) ஆகியவற்றை யும், சோதனை எந்த நோக்கத்திற்காக நடத்தப்படுகிறது என்பதையும் பொறுத்தது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட குழுவில் மாறுபாடு குறைந்த அளவில் காணப்பட்டால், சோதனையின் நம்பகக் கெழு .5 அல்லது .6-க்கு அதிகமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை என்பது பலரின் கருத்தாகும். திட்டமான நுண் ணறிவுச் சோதனைகளிலும், கல்விச் சாதனைச் சோதனைகளிலும் நம்பகக் கெழு .9-க்கு அதிகமாக இருத்தல் மேலானது என்பது பொதுவான கருத்தாகும். நம்பகக் கெழு, தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட குழுவின் மாறுபாட்டைச் சார்ந்திருப்பதால், நம்பகக் கெழுவைக் குறிப்பிடும்போது அத்துடன் சோதனைப் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தையும் குறிப்பிட வேண்டும். மேலும், நம்பகக் கெழுவைக் குறிப்பிடும் போது, எந்த முறையினால் அது கணிக் கப்பட்டது என்பதையும், சோதனை செயல் முறைகளையும், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட குழுவைப் பற்றிய விவரங்களையும் குறிப் பிட வேண்டும்.

(2) ஏற்புடைமை (Validity)

ஒரு சோதனை, குறிப்பிட்ட சாதனையை அளக்கும் கருவி யாக அமையும் போது அதே சாதனையை அளக்கும் தனித்த திட்டமான ஓர் அளவையுடன் அச் சோதனையை ஒப்பிட்டு அச் சோதனை ஏற்கக் கூடியதாக அமைகிறதா எனத் தீர்மானிக் கப்படுகிறது. ஒரு கடிகாரத்தின் நேரத்தை 10 நிமிடங்கள் முன் நோக்கி வைக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். அந்த கடிகாரம் ஒரு நல்ல கடிகாரமாக இருக்குமாயின், அது காட்டும் நேரம் நம்பகமாக இருக்கும். ஆனால், அது காட்டும் நேரத்தைக் திட்ட நேரத்துடன் ஒப்பிட்டால், அது ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய தாக இருக்காது. ஒரு சோதனையைத் திரும்பத் திரும்ப நடத்தி நம்பகம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. ஆனால், சோதனைகளிலிருந்து பெறும் அளவுகளைத் திட்டமான அளவைகளிடமிருந்து (Standard Measures) பெறும் அளவுகளுடன் ஒப்பிட்டு அச் சோதனையின் ஏற்புடைமை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, அளவுகோலைக் கொண்டு உயரத்தை அளப்பதாக வைத்துக் கொண்டால், பலமுறை திரும்பத் திரும்ப உயரத்தை அளந்து நம்பகம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. ஆனால் உயரத்தை அளந்து பெறும் மதிப்பை மற்றொரு திட்டமான அளவையினால் பெறும் மதிப்புடன் ஒப்பிட்டு ஏற்புடைமை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. உளச் சோதனைகளில் தனித்த திட்டமான அளவைகளை பெறச் சிக்கலாக இருப்பதால், ஏற்புடைமையைச் சரியாகத் தீர் மானிக்க முடியாது.

ஒரு நிலையில் ஏற்கக்கூடியது ஒன்று எல்லாச் சமயங்களிலும் ஏற்கக்கூடியயதாக இருக்காது. குமாஸ்தா வேலைக்காக ஆள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கப் பயன்படுத்தும் உளவியல் சோதனையை வேறு உத்தியோகங்களுக்கு ஆள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கப் பயன்படுத்தினால், அச்சோதனை ஏற்கக் கூடியதாக அமையாது. மேலும், ஒரு குறிப்பிட்ட வேலைக்காக உளவியல் சோதனை நடத்தி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நபர்கள், அந்த வேலையில் ஆர்வமற்றவர்களாக இருந்தால் அச் சோதனையை, திறமையை (குறிப்பிட்ட வேலையில்) அளக்கும் கருவியாகக் கொண்டு ஏற்றுக்கொள்ள முடியாது. ஏற்புடைமை என்பது ஓர் ஒப்பீடு சொல்லாகும். ஏற்புடைமை கீழ்க்காணும் முறைகளினால் தீர்மானிக்கப்படுகிறது:

(1) தீர்ப்பினால் முடிவு செய்தல் (a) திருப்தியடைந்த ஏற்புடைமை (Content Validity) (b) முக ஏற்புடைமை (Face Validity).

(2) செய்முறை சோதனையினால் முடிவு செய்தல்

(3) பகுப்பாய்வு ஏற்புடைமை.

(1) ஏற்புடைமையைத் தீர்ப்பினால் முடிவு செய்தல்

கல்விச் சாதனைச் சோதனைகளிலும், பல வணிகச் சோதனைகளிலும் (Trade tests) உருப்படிகளைத் (வினாக்களை அல்லது உத்திக் கணக்குகளை) தேர்ந்தெடுக்கும்போது 'திருப்தியடைந்த ஏற்புடமை' பயன்படுத்தப்படுகிறது. கல்விச் சாதனைப் பரீட்சையில், ஒரு குறிப்பிட்ட வயதையுடைய அல்லது குறிப்பிட்ட கல்வியையுடைய ஒரு குழந்தை எண் கணிதம், சரித்திரம், பூகோளம் போன்ற பாடங்களிலும், மற்றப் பாடங்களிலும் என்னென்ன தெரிந்திருக்க வேண்டும் என்பதைத் தகுதி வாய்ந்த பல கல்வியாளர்கள் முடிவு செய்து, அம் முடிவுக்கேற்ப உருப்படிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அத்தகைய உருப்படிகள் அடங்கும் ஓர் திட்டமான சோதனையை உருவாக்கி, அந் திட்டமான சோதனையுடன் கல்வி சாதனைச் சோதனையை ஒப்பிட்டு, கல்விச் சாதனைச் சோதனையின் ஏற்புடைமை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு ஏற்புடைமை தீர்ப்பினால் முடிவு செய்யப்படுகிறது.

குறிப்பிட்ட சூழ்நிலையில் சோதனையின் உருப்படிகள் எப்படி இருக்க வேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்க முக ஏற்புடமை தேவைப்படுகிறது. குறிப்பான நிலைமையில், குறிப்பிட்ட சோதனைக்காகத் தகுந்த உருப்படிகளை தேர்ந்தெடுக்க இது

பயன்படுகிறது. குழந்தைகளுக்கான சோதனைகளுக்கு உருப்படிகளைத் தீர்மானிக்கவும், முதிர்யோர்களுக்கான சோதனைகளுக்கு உருப்படிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் முக ஏற்புடைமை தேவைப்படுகிறது. 50 வயதான ஒருவரை அவருக்கு எத்தனை விரல்கள் உள்ளன எனக் கேட்கும் வினா பொருத்தமற்றதாகவும், பொருளற்றதாகவும் இருக்கலாம். ஆனால், அதே வினாவை 5 வயது பையனுக்குக் கொடுத்தால் அது நியாயமான பொருத்தமான வினாவாக இருக்கலாம். இவ்வாறு, தீர்ப்பினால் சோதனையின் ஏற்புடைமை முடிவு செய்யப்படுகிறது. உளவியல் சோதனைகளில் உருப்படிகளைச் சோதிப்பதற்கு முக ஏற்புடைமை முதற்படியாகும்.

(2) ஏற்புடைமையைச் செய்முறைச் சோதனையினால் முடிவு செய்தல்

ஒரு சோதனைக்கும், ஒரு திட்ட அளவைக்கும் (Criterion) இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பைக் கணக்கிடுவதின் மூலம் செய்முறையில் ஏற்புடைமைத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. செயலின் அளவை (Measure of performance), பண்பின் அளவை (qualitative measure) போன்ற அளவைகள் திட்ட அளவைகளாக இருக்கலாம்.

(3) பகுப்பாய்வு ஏற்புடைமை

ஒரு சோதனைக்கும், முழு சோதனைத் தொகுதியிலிருந்து (entire test battery) பிரித்தெடுக்கப்பட்ட திறமைக் கூறுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு அச் சோதனையின் பகுப்பாய்வு ஏற்புடைமை ஆகும். சொற்றொகுதிச் சோதனைக்கும் (Vocabulary test), முழு சோதனைத் தொகுதியிலிருந்து பிரித்தெடுக்கப்பட்ட சொல் திறமைக் கூறுக்கும் (Verbal factor) இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக்கெழு .65 எனில், அச்சோதனையின் பகுப்பாய்வு ஏற்புடைமை .65 ஆகும்.

சோதனை நீட்டிப்பின் விளைவு

ஒரு சோதனை நீட்டிப்பின் பலனாக நம்பகம் உயருவதல்லாமல் சோதனையின் ஏற்புடைமையும் உயரும். சோதனையை *K* தடவைகள் மேலும் நடத்தினால் அல்லது *K* இணைத்தாள்களை உருவாக்கினால் ஏற்புடைமைக் கெழு எந்த அளவு பாதிக்கும் என்பதைக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாடு வெளிப்படுத்தும்.

$$r_{c(K x_1)} = \frac{K\, r_{cx_1}}{\sqrt{K + K(K-1)r_{11}}}$$

இங்கு,

$r_{c(Kx_1)}$ என்பது திட்ட அளவை C-க்கும் சோதனை $-X_1$-க்கான K இணைத் தாள்களுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு.

r_{cx_1} என்பது திட்ட அளவை C-க்கும் சோதனை $- X_1$-க்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு.

r_{11} என்பது X_1 சோதனையின் நம்பகக் கெழு.

K என்பது இணைத்தாள்களின் எண்ணிக்கை அல்லது சோதனை X_1 மேலும் நடத்தப்படும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை.

நம்பகமும், ஏற்புடைமையும்

திட்ட அளவையோ (Criterion) அல்லது கொடுக்கப்பட்ட சோதனையோ அல்லது இவை இரண்டுமே நம்பகமாக இல்லா விடில் சோதனைக்கும் திட்ட அளவைக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு குறைந்து காணப்படும். அத்தகைய சமயங்களில் நம்பகக் கெழுவிற்கோ அல்லது ஏற்புடைமைக் கெழுவிற்கோ திருத்தத்தைக் கொடுத்து உடன் தொடர்பை மதிப்பிடலாம். நம்பகம், சோதனை மதிப்புகளை உறுதியாக்கும். ஏற்புடைமை சோதனையைச் சிறந்ததாக அமைக்கும். நம்பகமான ஒரு சோதனை நடைமுறையில் ஏற்கக் கூடியதாக இல்லாமலிருக்கலாம். ஆனால், ஏற்கக் கூடிய ஒரு சோதனை நம்பிக்கையற்றதாக இருக்காது.

(3) உருப்படி ஆய்வு (Item Analysis)

சோதனை மதிப்புகளின் ஏற்புடைமையும், நம்பகமும் சோதனை வினைத் திறனை (Test efficiency) உயர்த்துகின்றன. சோதனைக்கான உருப்படிகளை (வினாக்கள் அல்லது உத்திக் கணக்குகள்) தகுந்த கவனிப்புடன் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். சோதனைக்கான உருப்படிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, சோதனை எந்த நிலைமையில், எந்த நோக்கத்திற்காக நடத்தப்படும் என்பதையும், உருப்படிகளின் தகுதியையும், சோதனைக்கான உருப்படிகளைத் தீர்மானிக்கும் தகுதி வாய்ந்த நபர்களின் தீர்ப்பையும் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும் சில உருப்படிகள் குறிப்பிட்ட சோதனைகளுக்கு மட்டுமே பொருத்தமாக இருக்கலாம். சில வகையான உருப்படிகள் நுண்ணறிவுத் தேர்வில் பயனுள்ளதாக இருக்கின்றன. பொதுவாக உருப்படி

களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, குறிப்பிட்ட சோதனைக்கு அவற்றினுடைய பொருத்தத்தையும், அவற்றைப்பற்றி ஆசிரியர்கள், கல்வியாளர்கள் வேறு தகுதி வாய்ந்தவர்களின் கருத்துகளையும் சோதனை நடத்துபவர் கவனிக்க வேண்டும். கல்விச் சாதனை சோதனைக்கான உருப்படிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது எல்லா வகையான (எல்லாத் துறைகளிலிருந்து) வினாக்களும் சோதனையில் இடம் பெற்றிருக்க வேண்டும். மேலும், சோதனைக்காகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட உருப்படிகளின் தகுதியைச் சிறந்த கல்வியாளர்கள் பலர் ஒப்புக் கொள்ளப்பட்டதாக இருக்க வேண்டும்.

தகுதி வாய்ந்த நபர்களின் தீர்ப்பின்படி உருப்படிகளை வரிசைப்படுத்தியும், எவ்வளவு விரைவில் உருப்படிக்குத் தீர்வு காணப்படுகிறது (விடையளிக்கப்படுகிறது) என்பதைக் கணக்கிட்டும், சோதனையை ஏற்றுக் கொள்பவர்களில் எத்தனைபேர் ஓர் உருப்படிக்குச் சரியான விடையளித்திருக்கிறார்கள் என்பதைக் கணக்கிட்டும் ஓர் உருப்படியின் கடினத்துவம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

நியமிக்கப்பட்ட ஓர் உருப்படிக்குத் தரும் பதில்களும், ஒரு திட்ட அளவைக்கும் (Criterion) உள்ள தொடர்பை முடிவு செய்வதின் மூலம் அந்த உருப்படியின் திறனைக் கணக்கிடும் செய்முறையே உருப்படி ஆய்வு ஆகும். ஒரு சோதனையைத் திரட்டுவதற்காக உட்படுத்தப்பட்ட நபர்கள் அடங்கிய குழு அல்லது அனுபவம் வாய்ந்த நபர்களைக் கொண்ட குழு அந்த நியமிக்கப்பட்ட குழுவாக இருக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட உருப்படியைத் தவிர சோதனையின் மற்ற உருப்படிகளைச் சார்ந்த அளவை (சோதனையின் மொத்த மதிப்பு) திட்டமான அளவையாக இருக்கலாம். சோதனையின் ஒவ்வோர் உருப்படியைப் பற்றிய செய்திகளை உருப்படி ஆய்வு தனித்தனியாகத் தருவதால் சோதனையை உருவாக்க இந்த முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. உருப்படிகளைக் கடினத்திற்கேற்றவாறு வரிசைப்படுத்தி அமைப்பதற்கான வழிமுறையைக் காணவும், கல்வி அனுபவ காரணமாக ஏற்படுகின்ற நடத்தை மாற்றங்களை அறியவும், கற்றலில் சிரமங்களைக் (Learning difficulties) கண்டு பிடிக்கவும், நல்ல முறையில் கற்பிப்பதற்காகச் சிறந்த கருத்துகளைப் பெறவும் இந்த முறை அடிக்கடி பயன்படுத்துகிறது.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு குழு, ஓர் உருப்படிக்குத் தரும் பதில்களுக்கும், மொத்த சோதனை மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு அந்த உருப்படியின் திறனைப் பெறலாம். இவ்வாறு கணக்கிடும் உடன்

தொடர்புக் கெழு அதிகமாக அதிகமாக, அந்த உருப்படியின் திறனும் அதிகமாகும். உருப்படிக்கான பதில்கள் ஆம்—இல்லை, வெற்றி—தோல்வி போன்ற பதில்களாக இருப்பின், பைசீரியல்[1] உடன் தொடர்பு முறையினால் உடன் தொடர்புக் கெழுவினைக் கணிக்க வேண்டும். உருப்படிக்கான பதில்கள் எண்ணளவில் இருந்தால் (Numerically), பியாஸன் பெருக்க—மொமெண்ட் முறையினால் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடலாம்.

பயிற்சி 16.

(1) $r_{xx} = .90$

$S_x = 14$ எனில், உண்மையான மதிப்புகளின் மாறுபாட்டினைக் காண்க.

(2) பாதிச் சோதனையின் நம்பகக் கெழுக்கள் வருமாறு :

.20, .50, .72, .80, .92

முழுச் சோதனையின் நம்பகக் கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையில் $r_{xx} = .60$ எனில், சோதனையை 5 மடங்காக்கி நம்பகக் கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க.

(4) 50 உருப்படிகளைக் (வினாக்களைக்) கொண்ட ஒரு சோதனை, .78 நம்பகக் கெழுவினைக் கொண்டிருந்தால் 100 உருப்படிகளைக் கொண்ட அந்தச் சோதனையின் நம்பகக் கெழுவினைக் காண்க.

(5) 250 மாணவர்களுக்கு ஒரு சோதனையைக் கொடுத்து கீழ்க்கண்ட விவரங்களைப் பெறுகிறோம்.

கூட்டுச் சராசரி = 62.00

நம்பகக் கெழு = .91

A என்பவர் 50 மதிப்புகளைப் பெற்றால் அவரின் உண்மையான மதிப்பின் மதிப்பீட்டைக் காண்க.

(6) 40 உருப்படிகளைக் கொண்ட ஒரு சோதனையின் ஏற்புடைமைக் கெழு .45; நம்பகக் கெழு .75 எனில், சோதனையின் உருப்படிகளை 120 ஆக அதிகப்படுத்தி, நம்பகக் கெழுவினையும், ஏற்புடைமைக் கெழுவினையும் காண்க.

---

1. Garrett: Statistics in Psychology and Education, Page 375.

பட்டியல் A

இயல்நிலை — பரப்புப் பட்டியல்

x/σ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0 05	0 06	0 07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3061	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3377	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3960	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441

1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.-934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4974	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4986	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4-93

நூல் ஆசிரியர்கள் (R. A. ஃபிஷர், F. ஏட்ஸ அவர்களும்), வெளியிடுவோர் (ஆலிவர் பாய்ட் லிமிடெட், எடின்பர்க்) ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் 'உயிரியல் உழவியல், மருத்துவயியல் ஆய்விற்கான புள்ளி விவரப் பட்டியல்கள்' என்ற 5 ஆவது பதிப்பு புத்தகத்திலிருந்து இப்பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் B

இயல்நிலை வளைகோட்டின் நிலை தூர அல்லது குத்தாயப் பட்டியல்

x/σ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.[illegible]420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.20[illegible]9	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669

1 9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0395	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	0310	.0303	.0297	.0290
2 3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0161	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3 3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3 6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

நூல் ஆசிரியர்கள் (R. A. ஃபிஷர் அவர்களும், F. ஏட்ஸ் அவர்களும்), வெளியிடுவோர் (ஆலிவர்பாய்ட் லிமிடெட், எடின்பர்க்) ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் 'உயிரியல், உழவியல், மருத்துவயியல் ஆய்விற்கான புள்ளி விவரப் பட்டியல்கள்' என்ற 5ஆவது பதிப்பு புத்தகத்திலிருந்து இப்பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் C

t—பட்டியல்

n/P	0.50	0·10	0·05	0·02	0·01
1	1.000	6·34	12·71	31.82	63.66
2	0.816	2.92	4·30	6.96	9.92
3	0.765	2·35	3·18	4.54	5.84
4	0.741	2·13	2.78	3.75	4.60
5	0.726	2·02	2.57	3.36	4.03
6	0.718	1·94	2.45	3.14	3.71
7	0.711	1·90	2.36	3.00	3.50
8	0.706	1·86	2.31	2.90	3.36
9	0.703	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.700	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.697	1·80	2.20	2.72	3.11
12	0.695	1.78	2.18	2·68	3.06
13	0.694	1.77	2.16	2·65	3.01
14	0.692	1.76	2·14	2·62	2.98
15	0.691	1.75	2·13	2·60	2.95
16	0.690	1·75	2·12	2.58	2.92
17	0·689	1 74	2·11	2.57	2.90
18	0.688	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.688	1.73	2·09	2·54	2.86

20	0.687	1.72	2·09	2·53	2.84
21	0.686	1.72	2.08	2·52	2.83
22	0.686	1·72	2·07	2.51	2.82
23	0.685	1.71	2·07	2.50	2.81
24	0.685	1.71	2.06	2·49	2·80
25	0.684	1·71	2·06	2.48	2·79
26	0.684	1·71	2.06	2.48	2.78
27	0.684	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.683	1·70	2·05	2.47	2.76
29	0.683	1.70	2·04	2.46	2.76
30	0.683	1·70	2.04	2:46	2.75
35	0.682	1·69	2.03	2.44	2.72
40	0.681	1.68	2.02	2.42	2.71
45	0.680	1.68	2·02	2·41	2.69
50	0.679	1·68	2·01	2.40	2.68
60	0.678	1·67	2.00	2.39	2.66
∞	0.674	1.64	2.33	2·33	2.58

நூல் ஆசிரியர்கள் (R. A. ஃபிஷர் அவர்களும், F. ஏட்ஸ் அவர்களும்), வெளியிடுவோர் (ஆலிவர் பாய்ட் லிமிடெட், எடின்பர்க்) ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் ‘உயிரியல், உழவியல், மருத்துவயியல் ஆய்விற்கான புள்ளி விவர பட்டியல்கள் என்ற 5ஆவது பதிப்பு புத்தகத்திலிருந்து இப் பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் D

கை வர்க்கப் பட்டியல் (χ^2 பட்டியல்)

n/P	0.99	0.95	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01
1	0.0002	0.004	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64
2	0.020	0.103	1.39	2.41	3.22	4.00	5.99	9.21
3	0.115	0.35	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	11.34
4	0.30	0.71	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28
5	0.55	1.14	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.00
6	0.87	1.64	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81
7	1.24	2.17	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48
8	1.65	2.73	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09
9	2.09	3.32	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67
10	2.56	3.94	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21
11	3.05	4.58	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	24.72
12	3.57	5.23	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	26.22
13	4.11	5.89	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	27.69
14	4.66	6.57	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	29.14
15	5.23	7.26	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	30.58

16	5.81	7.96	15.34	18.42	20.46	23.54	26.30	32.00
17	6.41	8.67	16.34	19.51	21.62	24.77	27.59	33.41
18	7.02	9.39	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	34.80
19	7.63	10.12	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	36.19
20	8.26	10.85	19.34	22.78	25.04	28.41	31.41	37.57
21	8.90	11.59	20.34	23.86	26.17	29.62	22.67	38.93
22	9.54	12.34	21.34	24.04	27.30	30.81	33.92	40.29
23	10.20	13.09	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	41.64
24	10.86	13.85	23.34	27.10	29.55	33.20	36.42	42.98
25	11.52	14.61	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	44.31
26	12.20	15.38	25.34	29.25	31.80	35.56	38.88	45.64
27	12.88	16.15	26.34	30.32	32.91	36.74	40.11	49.96
28	13.56	16.93	27.34	31.39	34.03	37.92	41.34	48.28
29	14.26	17.71	28.34	32.46	35.14	39.09	42.56	49.59
30	14.95	18.49	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	50.89

நூல் ஆசிரியர்கள் (R. A. ஃபிஷர், அவர்களும், F. ஏட்ஸ் அவர்களும்), வெளியிடுவோர் (ஆலிவர் பாய்ட் லிமிடெட், எடின்பர்க்) ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் 'உயிரியல், உழவியல், மருத்துவயியல் ஆய்விற்கான புள்ளி விவரப் பட்டியல்கள்' என்ற 5 ஆவது பதிப்பு புத்தகத்திலிருந்து இப் பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் E

F—பட்டியல் 1%

n_1/n_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6106	6234	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.37	99.42	99.46	99.50
3	34.12	30.88	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.60	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	13.93	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.29	9.89	9.47	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.30	3.96	3.59	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.14	3.80	3.43	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.45	3.08	2.65
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.00	2.57

19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	5.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.32	3.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.23	2.90	2.52	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.20	2.87	2.49	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.29	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.12	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.34	1.95	1.38
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	1.79	1.00

நூல் ஆசிரியர்கள் (R. A. ஃபிஷர் அவர்களும், F. ஏட்ஸ் அவர்களும்), வெளியிடுவோர் (ஆலிவர்பாய்ட் லிமிடெட், எடின்பர்க்) ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன் 'உயிரியல், உழவியல், மருத்துவயியல் ஆய்விற்கான புள்ளி விவரப் பட்டியல்கள்,' என்ற 5ஆவது பதிப்பு புத்தகத்திலிருந்து இப் பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

F—பட்டியல் 5%

n_2/n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.63
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88

20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.75	1.52	1.00

நூல் ஆசிரியர்கள் (R. A. ஃபிஷர் அவர்களும், F. ஏட்ஸ் அவர்களும்) வெளியிடுவோர் (ஆலிவர் பாய்ட் லிமிடெட், எடின்பர்க்) ஆகியவர்களின் அனுமதியுடன், 'உயிரியல், உழவியல், மருத்துவயியல் ஆய்விற்கான புள்ளி விவரப் பட்டியல்கள்' என்ற 5ஆவது புத்தகத்திலிருந்து இப் பட்டியல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேற்கோள் நூல்களின் பட்டியல்

(List of Reference Books)

1. Barlow's Tables of Squares etc. — E and F.N. Spon Ltd. London,

2. H. M. Blalock, Jr. — Social Statistics, Mc Graw-Hill, New york.

3. B.C. Brooks and W.F.L. Dick — Introduction to Statistical Methods, Heinemann, London.

4. Cochran, W. G. — Sampling Techniques, Wiley New York.

5. Cohen, Lillian — Statistical Methods for Social Scientists, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs. N.J.

6. Dixon W. J and Massey F.J. Jr. — Introduction to Statistical Analysis, McGraw-Hill, New York.

7. S. M. Dornbusch and C. F Schmid — A primer of Social Statistics, McGraw–Hill, New York.

8. Ferguson, George. A. — Statistical Analysis in Psychology and Education, Mc Graw-Hill, New York.

9. Fisher, R. A. — Statistical Methods for Research Workers, Hafner, New York.

10. Fisher, R. A and Yates, F. — Statistical tables for Biological, Agriculture and Medical Research, Oliver and Boyd Ltd., London.

11. Freund. J. E. — Modern Elementary Statistics, Prentice—Hall, New York.

12. Fryer, H.C. — Elements of Statistics, Wiley, New York.

13. Garrett, Henry. E. — Statistics in Psychology and Education, Vakil, Feffer and Simons Pvt. Ltd., Bombay.

14. Guenther, W. C. — Concept of Statistical Inference, McGraw-Hill, New York.

15. Guilford, J.P. — Fundamental Statistics in Psychology and Education, McGraw-Hill, New York.

16. Kendall M. G. — The advanced theory of Statistics, Vol I, Griffen, London.

17. Mcnemar, Quinn. — Psychological Statistics, Wiley, New York.

18. Mills, F. C. — Statistical Methods, Holt Rinehart and Winston, New York.

19. Rider, Paul. R. — An Introduction to Modern Statistical Methods, Wiley, New York.

20. Siegel, Sidney. — Non parametric Statistics for the behavioral Sciences, McGraw-Hill, New York.

21. Taro Yamane — Statistics an Introductory Analysis, Harper and Row, New york and John Weatherhill Inc. Tokyo.

22. Tippet, L.H. C. — The methods of Statistics, Wiley, **New York.**

23. Walker Helen. M, and Lev. J. — Statistical Inference, Oxford and IBH. Publishing Co., Calcutta.

24. Waugh, A. E. — Elements of Statistical Methods, McGraw-Hill, New York.

25. Wert. J. E., Neidt. O.C., and J.S Ahmann. — Statistical Methods and Education and Psychological Research, Appleton-Century-Crofts Ins. New york.

26. Wilks, S.S. — Elementary Statistical Analysis, Princeton University Press, Princeton.

27. Yule. G. U., and Kendall, M.G. — An Introducaion to the thoery of Statistics, Hafner, New **York.**

கலைச்சொற்கள்

A

Ability	—	திறமை, ஆற்றல்
Ability, arithmetic	—	எண் கணக்குத் திறமை
,, general	—	பொதுத் திறமை
,, mathematical	—	கணிதத் திறமை
,, reading	—	படிப்புத் திறமை
,, verbal	—	சொல் திறமை
Abnormal	—	இயல்பு கடந்த, பிறழ்வான
Abscissa	—	கிடை தூரம், மட்டாயம்
Absolute	—	தனி
,, deviation	—	தனி விலக்கம்
,, value	—	தனிப் பெறுமானம்
Achievement	—	அடைவு, சாதனை
Adult	—	முதிர்ந்தோர்
Age	—	வயது
Age, mental	—	மன வயது
Agression	—	தாக்கும் மனப்பான்மை, எதிர்ப்பு மனப்பான்மை
Algebra	—	இயற் கணிதம்
Algebraic Symbol	—	இயற் கணிதக் குறி
Altitude	—	குத்துக்கோடு, குத்துயரம்
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
Analysis of Variance	—	பரவற்படி ஆய்வு

Aposterion Probability	— பின்கூட்டு ஊக அளவை, காரிய காரண ஊக அளவை
Applied Psychology	— பயன்முறை உளவியல்
Applied Statistics	— பயன்முறை புள்ளியியல்
Approximate	— தோராயமாக, ஏறக்குறைய
Apriori probability	— முன்கூட்டு ஊக அளவை, காரண காரிய ஊகஅளவை
Aptitude	— இயற்கையாற்றல், தகுதி, திறமை
Arithmetic mean	— கூட்டுச் சராசரி, கூட்டிடை
Array	— வரிசைகள்
Ascending order	— ஏறு வரிசை
Association	— உறவு, தொடர்பு
,, coefficient	— உறவுக் கெழு
Asymmetry	— சமச்சீரின்மை
Attention	— கவனம்
Attitude	— மனப்பான்மை
Attribute	— பண்பு
Average	— சராசரி
Axis	— அச்சு

B

Bar chart	— பட்டை விளக்கப்படம்
Bar diagram	— ,,
,, ,, Component	— பல் அங்க பட்டை விளக்கப் படம்
,, ,, Grouped	— இணைப்பட்டை விளக்கப் படம்
Behaviour	— நடத்தை
,, human	— மானிட நடத்தை
Bias	— ஒரு சார்பான, ஒரு தலைப் பட்ட, பிறழ்ச்சியான
Binomial	— ஈருறுப்பு
,, distribution	— ஈருறுப்புப் பரவல்
,, expression	— ஈருறுப்புக் கோவை

Biserial correlation	—	இருதொடர் உடன்தொடர்பு, பைசீரியல் உடன்தொடர்பு
Bivariate	—	இரு மாறி
Brackets	—	அடைப்புகள்

C

Central tendency	—	மைய நிலைப் போக்கு
,, ,, Measures of	—	மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்
Chance	—	வாய்ப்பு
,, law of	—	வாய்ப்பு விதி
Chart	—	விளக்கப்படம், வரைப்படம்
Childhood	—	இளமைப் பருவம்
Chi - Square	—	கை வர்க்கம்
,, test	—	கை வர்க்க சோதனை
Class	—	பிரிவு
Class limit	—	பிரிவு எல்லை
,, Frequency	—	பிரிவு அலைவெண்
,, interval	—	பிரிவு இடைவெளி
,, lower limt	—	பிரிவின் கீழ் எல்லை
,, upper limit	—	,, மேல் எல்லை
Classification	—	பிரிவினை, பாகுபாடு
,, One way	—	ஒரு வழிப் பாகுபாடு
,, Two way	—	இரு வழிப் பாகுபாடு
Coefficient	—	கெழு
,, Contingency	—	இணைப்புக் கெழு
,, Dispersion	—	சிதறல் கெழு
,, Regression	—	மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு
,, Skewness	—	கோட்டக் கெழு
,, Variation	—	மாறுபாட்டுக் கெழு
,, Correlation	—	உடன் தொடர்புக் கெழு
,, Reliability	—	நம்பகக் கெழு
,, Validity	—	ஏற்புடைமைக் கெழு
Column	—	நிரல், பத்தி

Compound event — கூட்டு நிகழ்ச்சி
Concentration — குவிவு
Conditional — நிபந்தனை
,, probability — நிபந்தனை ஊக அளவை
Confidence interval — நம்பிக்கை இடைவெளி
,, limit — நம்பிக்கை வரம்பு, நம்பிக்கை எல்லை
,, level — நம்பிக்கை வரம்பு
Consistency — இசைவு, பொருத்தம்
Constant — மாறிலி, நிலையெண்
Contingency — இணைப்பு
,, table — இணைப் பட்டியல்
Continuous — தொடர்ச்சியான
,, Variable — தொடர் மாறி
Correlation — உடன் தொடர்பு, ஒட்டுறவு
,, Biserial — இரு தொடர் உடன்தொடர்பு பைசீரியல் உடன்தொடர்பு
,, Coeffcient — உடன்தொடர்புக் கெழு
,, linear — நேர்கோட்டு உடன்தொடர்பு
,, negative — எதிரிடைத் தொடர்பு
,, perfect negative — ஒன்றிய எதிரிடைத்தொடர்பு
,, positive — நேரிடைத் தொடர்பு
,, perfect positive — ஒன்றிய நேரிடைத்தொடர்பு
,, Rank — தரத் தொடர்பு
,, Tetrochoric — டெட்ராகோரிக்
Cosine — கொசைன்
Covariance — உடன் மாற்றம்
Criterion — திட்டமான அளவை
Culture — பண்பாடு
Cumulative — குவிவு, திரள்
,, curve — குவிவு வளைகோடு
,, distribution — குவிவுப் பரவல்
,, frequency — குவிவு அலைவெண்

Cumulative frequency of the greater than	—	மேலின குவிவு அலைவெண்
,, ,, of the less than	—	கீழின குவிவு அலைவெண்
Curve	—	வளைகோடு, வரை

D

Data	—	விவரங்கள்
,, Numerical	—	எண் விவரங்கள்
,, Observational	—	கண்டறிந்த விவரங்கள்
,, Primary	—	முதனிலை விவரங்கள்
,, Secondary	—	இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்
,, Statistical	—	புள்ளி விவரங்கள்
Decile	—	பதின்மானம்
Definition	—	வரையறை
Degree	—	டிகிரி, பாகை
Degrees of freedom	—	வரையற்ற பாகைகள்
Dependent	—	சார்ந்த
,, Variable	—	சார்ந்த மாறி
Design	—	திட்ட அமைப்பு, உருவமைப்பு
,, of Experiments	—	சோதனைத் திட்ட அமைப்பு
Deviation	—	விலக்கம்
,, Absolute	—	தனி விலக்கம்
,, Average	—	சராசரி விலக்கம்
,, Mean	—	கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
,, Quartile	—	கால்மான விலக்கம்
,, Standard		திட்ட விலக்கம், தர விலக்கம்
Diagram	—	விளக்கப்படம்
,, bar	—	பட்டை விளக்கப்படம்
,, Pie	—	வட்ட ,,
,, Scatter	—	சிதறல் ,,
Dichotomy	—	இரு பிரிவு
Die	—	பகடை
Difference	—	வேறுபாடு, வித்தியாசம்

Digit — இலக்கம்
Discontinuous variable — தொடர்பிலா மாறி
Discrete — தனித்த, தொடர்ச்சியற்ற
,, Variable — தனித்த மாறி
Dispersion — சிதறல், பரவுகை
,, Measures of — சிதறல் அளவைகள்
Distribution — பரவல்
,, Bell shaped — மணிவடிவப் பரவல்
,, Binomial — ஈருறுப்புப் பரவல்
,, Continuous — தொடர்ப் பரவல்
,, Cumulative — குவிவுப் பரவல்
,, discontinuous — தொடர்பிலாப் பரவல், தொடர்ச்சியற்ற பரவல்
,, discrete — தொடர்ச்சியற்ற பரவல்
,, frequency — அலைவுப் பரவல்
,, Normal — இயல்நிலைப் பரவல்
,, Poisson — பாய்ஸான் ,,
,, Sampling — மாதிரிப் பரவல்
,, χ^2 — கைவர்க்கப் பரவல்
,, 'F' — 'F' பரவல்
,, t — 't' பரவல்

E

Efficiency — வினைத் திறன்
,, forecasting — முன்கூற்றுத் திறமுடைய
Empirical — அனுபவ நிலை
Environment — சூழ்நிலை
Equation — சமன்பாடு
Error — பிழை
,, Experimental — செய்முறைப் பிழை
,, Probable — ஊகப் பிழை
Error, Standard — திட்டப் பிழை
Estimate — மதிப்பீடு
Even number — இரட்டைப் படை எண்

Event	—	நிகழ்ச்சி
,, Compound	—	கூட்டு நிகழ்ச்சி
,, fovourable	—	சாதக ,,
,, independent	—	சார்பற்ற ,,
,, Mutually exclusive	—	ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி
Exact class interval	—	மெய்ப்பிரிவு இடைவெளி
Expand	—	விரி
Expectation	—	எதிர்பார்த்தல்
,, Mathematical	—	கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்
Expected value	—	எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு
Experimental Design	—	செய்முறைத் திட்டம்
Expression	—	கோவை
,, Binomial	—	ஈருறுப்புக் கோவை

F

Factor	—	காரணி, பகுப்பு, திறமைக் கூறு
Factorial	—	காரணியப் பெருக்கம்
,, Method	—	பகுப்பாய்வு முறை
Fluctuation	—	ஏற்ற விறக்கம்
Forecast	—	முன்கணிப்பு, முன்கூற்று
Formula	—	சூத்திரம், வாய்பாடு
Frequency	—	அலைவெண்
,, curve	—	,, வளைகோடு
,, graph	—	,, வரைப்படம்
,, Polygon	—	அலைவுப் பலகோணம்
,, Table	—	அலைவுப் பட்டியல்
Function	—	சார்பலன்

G

General	—	பொதுவான
Geometric mean	—	பெருக்குச் சராசரி
Goodness of fit test	—	பொருத்தச் சோதனை

Graph — வரைப்படம்
Greater than Ogive — மேலின ஓகைவ்
Group — குழு

H

Harmonic mean — ஹார்மோனிக் சராசரி
Hetrogeneous — பலபடித்தான
Histogram — அலைவெண் செவ்வகப்படம்
Hamogeneous — ஒருபடித்தான
Hypothesis — எடுகோள்
,, Null — சூனிய எடுகோள்
,, Alternative — மாற்று எடுகோள்

I

Ideal — விழுமிய
Identity — முற்றொருமை
Indepenent — சார்பிலா
,, event — சார்பிலா நிகழ்ச்சி
Infant — குழவி, சிசு
Inference — உய்த்துணர்வு
Infinite — எல்லையற்ற
Infinity — எண்ணிலி
Intelligence — நுண்ணறிவு, அறிவுத்திறன்
Intelligence Quotient (I. Q.) — நுண்ணறிவு ஈவு
,, Test — நுண்ணறிவுச் சோதனை
Item — உருப்படி, இனம், வினா அல்லது உத்திக் கணக்கு
,, Analysis — உருப்படி ஆய்வு

K

Kurtosis — தட்டை அளவு
,, Leptokurtic — குறைத் தட்டை
,, Mesokurtic — இயல்நிலை தட்டை
,, Platykurtic — மிகைத் தட்டை

L

Large samples — பெரிய மாதிரிகள்
Learning — கற்றல்
Least square — குறைந்த வர்க்க
Limit — எல்லை, வரம்பு
Less than Ogive — கீழின ஓகைவ்
Linear — நேர்க்கோட்டுக்குரிய
,, Correlation — நேர்கோட்டு உடன்தொடர்பு
Logarithm — மடக்கை

M

Maze — சிக்கலறை
Mean — கூட்டுச் சராசரி
,, weighted — நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி
Measure — அளவு, அளவை
,, of central tendency — மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்
Mearurement — அளத்தல், அளவிடு
Median — இடைநிலை
Memory — நினைவு
Mental age — மன வயது
Method — வழி, முறை
,, Psychiatric — உள மருத்துவ முறை
Mid Value of a Class — பிரிவின் நடுமதிப்பு
Minimum — சிறுமம்
Mode — முகடு
Moments — விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்
Mutually exclusive events — ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள்

N

Negative — குறை, எதிர்
Neurosis — நரம்புப் பிணி
Normal curve — இயல்நிலை வளைகோடு, ஒழுங்கு வளைகோடு
,, distribution — இயல்நிலைப் பரவல்
,, Population — இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி, நிலையான முழுமைப் தொகுதி.
Normality — சாதாரண இயல்பு

O

Object — பொருள்
Observation — கண்டறிதல்
Observed data — கண்டறிந்த விவரங்கள்
Occupational attitude — தொழில் பற்றிய மனப்பான்மை
Odd — ஒற்றை, ஒற்றைப்படையான
Ogive — ஓகைவ்
One - tailed test — ஒருமுனைச் சோதனை
One way classification — ஒருவழிப் பாகுபாடு
Open interval — திறந்த இடைவெளி
Ordinate — நிலைக்கோடு குத்தாயம்
Origin — மூலம்

P

Pair — சோடி
Parallel forms — இணைத்தாள்கள், சமாந்தரத் தாள்கள்
Parameter — முழுமைத் தொகுதியின் அளவை
Para Psychology — ஆன்மீக உளவியல்
Percentage — சதவீதம்
Percentile — நூற்றுமானம்
Perfect — ஒன்றிய
Personality — ஆளுமை
,, traits — ஆளுமைப் பண்புகள்
Pictogram — உருவ விளக்கப்படம்
Pie diagram — வட்ட விளக்கப் படம்
Poisson distribution — பாய்ஸான் பரவல்
Population — முழுமைத் தொகுதி
Positive — நேர், மிகை
Precision — திட்பம்
Prediction — முன் கூற்று, முன் கணிப்பு
Probability — ஊக அளவை, நிகழ் திறம், நிகழ் தகவு
,, Mathematical — கணக்கியல் ஊக அளவை
,, Statistical — புள்ளியியல் ஊக அளவை
Probable error — நிகழ் பிழை, ஊகப் பிழை
Problem — உத்திக் கணக்கு
Procedure — செய்முறை, நடைமுறை

Product - moment — பெருக்க மொமென்டு
Proportion — விகித சமம்
Property — தன்மை, பண்பு
Psychology — உளவியல்
,, Industrial — தொழிற்சாலை உளவியல்
,, Occupational — தொழில் உளவியல்
,, Social — சமூக உளவியல்
,, Statistics — உளப் புள்ளியியல்

Q

Qualitative data — பண்பின விவரங்கள்
Quality — பண்புத் தரம்
Quantile — மதிப்பளவை
Quantitative data — அளவின விவரங்கள்
Quartile — கால்மானம்
,, deviation — கால்மான விலக்கம்
,, range — கால்மான வீச்சு
,, ,, inter — இடைக் கால்கான வீச்சு
,, ,, semi — அரை இடைக் கால்மானம்
Questionnaire — வினுத்தாள், வினுத்தொகுதி, கேள்வி நிரல், வினு வரிசை

R

Random — ராண்டம், இயைபிலா
,, fluctuations — ராண்டம் ஏற்ற விறக்கங்கள்
,, numbers — ராண்டம் எண்கள்
,, sampling — ராண்டம் மாதிரி
Range — வீச்சு
Rank — தரம், வரிசை, மதிப்பிடம்
,, correlation — தரத் தொடர்புப்பாடு
Rates — வீதங்கள்
Ratio — விகிதம்
Rating — அளவீடு, தரவீடு
Raw data — சீர்படா விவரங்கள், தொகுக்கப்படா விவரங்கள்
Reading — வாசிப்பு
Recall — மீட்டறிதல்
Regresion — மாறிகளின் தொடர்புப் போக்கு

Regression coefficient	— மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு
,, equation	— மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு
,, linear	— நேர்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்கு
,, lines	— தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்
Reliability	— நம்பகம்
,, coefficient	— நம்பகக் கெழு
Root mean square	— வர்க்க மூல வர்க்கச் சராசரி விலக்கம்
Root, Square	— வர்க்க மூலம்
Row	— நிரை, வரிசை

S

Sample	— மாதிரி, கூறு
,, Large	— பெரிய மாதிரி
,, Random	— ராண்டம் மாதிரி
,, Small	— சிறிய மாதிரி
Sampling distribution	— மாதிரிப் பரவல்
,, Simple random	— சாதாரண ராண்டம் மாதிரி
,, Stratified	— படுகை மாதிரி
,, Systematic	— ஒழுங்கு மாதிரி
Scale	— அளவுத் திட்டம், அளவு கோல்
,, interval	— இடைவெளி அளவுத் திட்டம்
,, Nominal	— பெயரளவுத் திட்டம்
,, ordinal	— வரிசை அளவுத் திட்டம்
,, ratio	— விகித அளவுத் திட்டம்
Scatter	— சிதறல்
,, diagram	— சிதறல் விளக்கப்படம்
Score	— மதிப்பு
Series	— தொடர், வரிசைகள்
Size	— உருவ அளவு, பருமன்
Self correlation	— தன் உடன் தொடர்பு
Sign test	— குறியிடுச் சோதனை
Skeweness	— கோட்டம்
Smoothing	— இழைத்தல்

Social — சமூக
,, adjustment — சமூகப் பொருத்தப்பாடு
,, behaviour — சமூக நடத்தை
Source — மூலம்
Stable — உறுதியான, நிலையான
Standard deviation — திட்ட விலக்கம், தர விலக்கம்
,, error — திட்டப் பிழை
,, score — திட்ட மதிப்பு
Standardize — திட்டப்படுத்து
Statistic — மாதிரியின் அளவை
Statistics (as data) — புள்ளி விவரங்கள்
,, (as science) — புள்ளியியல்
,, official — அரசாங்கப் புள்ளி விவரம்
Statistical diagram — புள்ளி விவர விளக்கப்படம்
,, measures — புள்ளி விவர அளவைகள்
Stratified — படுகை, அடுக்கிய
Submission — ஆட்படுத்தல்,
Symmetrical — சமச்சீரான
Symmetry — சமச்சீர்

T

Table — பட்டியல், அட்டவணை
Tabulate — பட்டியலமை
Tally mark — சரிபார்க்குங் குறி
Technique — செய்முறை, பொறி முறை
Term — உறுப்பு
Test — சோதனை
Test achievement — சாதனைச் சோதனை
,, Aptitude — இயற்கைத் திறன் சோதனை
,, Battery — சோதனைத் தொகுதி
,, Construction — ,, அமைப்பு
,, Maze — சிக்கலறைச் சோதனை
,, Mental — உளச் சோதனை
,, Performance — செயற் சோதனை
,, Personality — ஆளுமைச் சோதனை
,, Verbal — சொற் சோதனை
Test of independent — தொடர்பற்ற நிலைச் சோதனை
,, ,, significance — சிறப்புக்காண் சோதனை

Therapy, psycho — உள மருத்துவம்
Ties — ஒத்தன
Traits — பண்புகள்
Trial — முயற்சி
True class interval — மெய்ப் பிரிவு, உண்மையான பிரிவு
Two - tailed test — இருமுனைச் சோதனை

U

Unbiased — பிறழ்ச்சியற்ற
Uniform — ஒரு சீரான
,, class intervals — ஒரு சீரான பிரிவு இடைவெளிகள்
Unit — அலகு
Unity — ஒன்று
Unsymmetrical — சீரின்மை
Upper quartile — மேல் கால்மானம்

V

Valid — ஏற்கக் கூடிய
Validity — ஏற்புடைமை
,, coefficient — ஏற்புடைமைக் கெழு
,, face — முக ஏற்புடைமை
Value — மதிப்பு
Variance — மாறுபாடு
Variable — மாறி
Variate — மாறி
,, Bi — இரு மாறி
,, Continuous — தொடர் மாறி
,, Dependent — சார்புடை மாறி, சார்ந்த மாறி
,, Discrete — தொடர்பிலா மாறி
,, Independent — தனித்த மாறி
Variation — மாறுபாடு

W

Weighted average — நிறையிட்ட சராசரி
Width of a class interval — பிரிவு தூரம்

Y

Yes - no - type — ஆம்—இல்லை வகை

Z

Zero — பூச்சியம்

———

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

★

பின்வரும் பொருள்களில்

பட்டப்படிப்பிற்குரிய நூல்கள்

விரைவில் வெளிவரும்

கணிதம்	—	41	நூல்கள்
இயற்பியல்	—	28	,,
வேதியியல்	—	89	,,
தாவரவியல்	—	80	,,
விலங்கியல்	—	40	,,
பொறியியல்	—	50	,,
வரலாறு	—	45	,,
அரசியல்	—	34	,,
பொருளாதாரம்	—	83	,,
வணிகவியல்	—	36	,,
புள்ளியியல்	—	16	,,
உளவியல்	—	8	,,
புவியியல்	—	18	,,